





МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1990



БИБЛИОТЕКА
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ

Редактор серии
Д. В. ШИРКОВ

П. А. М. ДИРАК

К СОЗДАНИЮ
КВАНТОВОЙ
ТЕОРИИ ПОЛЯ
ОСНОВНЫЕ СТАТЬИ
1925—1958 ГОДОВ

Перевод с английского и французского
А. Б. КОЖЕВНИКОВА, В. П. ПАВЛОВА,
М. К. ПОЛИВАНОВА и В. П. ШЕЛЕСТА

Под редакцией
Б. В. МЕДВЕДЕВА

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1990

ББК 22.3г

Д 47

УДК 530.145 (091)

Серия «Библиотека теоретической физики»

издается с 1978 года

ДИРАК П. А. М. К созданию квантовой теории поля: Основные статьи 1925—1958 годов: Пер. с англ. и фр./Под ред. Б. В. Медведева.—М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.—(Б-ка теор. физики).—368 с.—ISBN 5-02-014024-4

Крупнейший современный теоретик П. А. М. Дирак является одним из создателей квантовой механики. Именно ему обязана квантовая теория своим превращением в логически последовательную схему, применимую к любым конкретным проблемам. Он создал в основном тот язык, которым мы теперь пользуемся в любом разделе квантовой теории. Преимущественной особенностью нестандартного подхода Дирака является его постоянное стремление к логической прозрачности, определяемое глубоким убеждением в том, что основные законы природы должны допускать простую формулировку. Последовательное чтение его работ необычайно ценно для формирования научного мировоззрения любого физика-теоретика.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, интересующихся развитием теоретической физики.

Д $\frac{1604030000-048}{053 (02)-90}$ 91-90

ISBN 5-02-014024-4

© «Наука». Физматлит,
перевод на русский язык,
предисловие редактора
перевода, 1990

П. А. М. ДИРАК И ЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

Вряд ли нужно представлять читателю человека, сборник работ которого он держит в руках. Поль Адриан Морис Дирак (1902—1984) — один из крупнейших физиков нашего века — был одним из тех, чьими стараниями были созданы квантовая механика и квантовая теория полей, лежащие в основе современного физического миропонимания. «Почти все существующие открытия, — писал про Дирака Рес Иост*), — были сделаны или были независимо также сделаны им». Один лишь краткий перечень его конкретных вкладов в физическую теорию занял бы, пожалуй, целую страницу.

Однако не только количеством и уровнем этих работ определяется роль Дирака в современной теоретической физике. Не меньшее значение имеют и некоторые особенности подхода к разрешению возникающих проблем, которые сделали его уникальной фигурой. Основным стимулом, который направлял всю шестидесятилетнюю работу Дирака по построению физической теории, было стремление к простоте и порядку. Он был глубочайше уверен в том, что природа может быть описана простым и единообразным образом. «Удовлетворительная теория, — писал он на последней странице 3-го издания (1947) своих «Принципов квантовой механики», — должна допускать простое решение любой простой физической проблемы».

Но эта простота, к которой он неуклонно стремился, отнюдь не представлялась ему элементарной. Напротив, он подчеркивал, что «постоянный прогресс физики требует для его теоретической формулировки математики все более высокого уровня ... и будет связан ... с непрерывной модификацией и обобщением лежащих в основе

*) *Jost R. // Aspects of Quantum Theory/Eds. A. Salam, E. P. Wigner.— Cambridge: Cambr. Univ. Press.—1972.— P. 61—77.*

математики аксиом» (статья 9 настоящего сборника). Простота и ясность теории означали для Дирака в первую очередь логическую стройность, последовательность и естественность ее построения, то, что он сам называл «mathematical beauty». Само создание теории воспринималось им как некая логическая игра (он сам использовал это сравнение), в которой надо сформулировать исходные правила, а затем получать, в точном следовании им, одно следствие за другим. При этом интересы общей архитектуры возводимого здания всегда выглядели более существенными, чем отдельные детали конструкции, которые могли иногда даже содержать некоторые дефекты. Самым важным неизменно представлялось неуклонное проведение логической линии, стремление продолжить ее столь далеко, сколь возможно, не колеблясь в страхе перед парадоксальностью получающихся выводов.

Хотя «физик играет в игру, правила которой задает природа», в отличие от математика, который «играет в игру, в которой он сам изобретает правила», не следует надеяться, что нужная математика сама возникнет из обобщения опытных фактов. «Лучший метод,— писал Дирак в статье 15 СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ МАТЕМАТИКОЙ И ФИЗИКОЙ,— состоит в том, что надо начать с выбора такой ветви математики, которая, Вы думаете, может стать основой новой теории. В этом выборе надо в сильной степени поддаваться влиянию соображений математической красоты... Выбрав область математики, следует начать разрабатывать ее в подходящих направлениях, присматриваясь одновременно к тому, как она может поддаться естественной физической интерпретации».

Очень примечательно для его собственной работы, что почти все исходные идеи, истоки тех основных правил, по которым велась игра, уже содержались, хотя бы в рудиментарной форме, в самых первых статьях 1925—1927 годов. Их последовательное развитие потребовало напряженных усилий в течение более чем четверти века, охватываемой работами, включенными в наш сборник. То, чем мы обязаны его успехам в этих усилиях, трудно переоценить.

Дирак не только превратил квантовую механику из набора рецептов для решения конкретных задач в цельную логически замкнутую теорию*), но и создал тот

*) Конкурировать могло бы только изложение И. фон Неймана (V. Neumann J. Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik.— Berlin: Springer, 1932. Перевод: фон Нейман И. Математические

язык — и понятий, и терминов, и символики, — на котором мы изъясняемся в любом разделе квантовой теории. Не будет преувеличением сказать, что если бы нам — как в детской игре — вдруг запретили бы пользоваться этим языком, мы очутились бы в положении строителей вавилонской башни.

Составляя настоящий сборник, мы поставили своей целью отобрать те из более чем двух сотен работ Дирака, которые образуют, на наш взгляд, нечто вроде «главной логической последовательности» (точнее — «дерева»), позволяя проследить отмеченные особенности его творческого метода, и в то же время содержат важнейшие из полученных им конкретных результатов.

Уже в первой включенной в сборник работе ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ ярко проявляются особенности свойственного Дираку подхода к физическим проблемам. Логический ход его рассуждений можно описать на более современном языке примерно следующим образом. Он начинает с наблюдения, что вся алгебраическая схема квантовой теории образует расширение алгебры классической механики на некоммутирующий случай. Но кроме алгебраических операций в формализме гамильтоновой механики участвует еще и дифференциальная операция — образование скобок Пуассона (СП), — определяемая через дифференцирования по динамическим переменным, чему по отношению к элементам некоммутативной алгебры кажется невозможным придать какой-либо смысл.

Изюминка работы Дирака состоит в том, что он предлагает сохранить только алгебраические свойства дифференциальной операции, определяя саму операцию по ним аксиоматически. Тогда возникает замечательная теорема, утверждающая, что всякая операция D_v (дифференцирования по квантсвой переменной), обладающая алгебраическими свойствами

$$D_v(x + y) = D_v(x) + D_v(y) \quad D_v(xy) = D_v(x)y + xD_v(y),$$

есть операция

$$D_v(x) = [x, a]_- = xa - ax$$

с некоторым a . Эта теорема позволяет выполнить расширение всех гамильтоновых операций — и алгебраических,

основы квантовой механики. — М.: Наука, 1964), но оно было для физиков слишком математизировано.

и дифференциальных. Таким образом, вместо классической механики с обычным (коммутативным) произведением и дифференциальной операцией образования СП мы приходим к расширенной чисто алгебраической (q -) схеме с двумя произведениями—обычным произведением и произведением Ли (образование коммутатора). «Соответствие между квантовой и классической теориями,— пишет Дирак,— лежит не столько в предельном согласии при $\hbar \rightarrow 0$, сколько в том факте, что математические операции в обеих теориях подчиняются во многих случаях тем же законам». Найденный прием расширения алгебры составляет универсальный рецепт квантования любой системы, допускающей гамильтоново описание, основное из тех «правил игры», которой Дирак будет заниматься всю свою дальнейшую жизнь.

Во второй работе К ТЕОРИИ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ Дирак продолжает формальное построение общей схемы квантовой теории. Стоит специально отметить, что уже здесь появляется различие между *тождествами*— в современной терминологии сильными операторными равенствами,— которые можно умножать на любые динамические величины и слева и справа и поэтому образовывать их коммутаторы с любыми динамическими переменными, и *уравнениями*—слабыми равенствами, выполняющимися лишь после умножения справа на волновую функцию, которые поэтому можно умножать на динамические переменные только слева, и которые, следовательно, не позволяют получать из них новые равенства путем коммутирования. Подробная разработка этой идеи привела Дирака через четверть века к построению (и квантовой, и классической) *обобщенной гамильтоновой динамики* (см. статьи 18, 19, 20), без которой не обойтись в современной релятивистской квантовой теории. Это показательный пример того весьма характерного для его научного творчества явления, когда раз возникшая у него идея может занимать его долгие годы, пока не найдет своего точного и достойного воплощения. Очень существенно, что здесь он впервые устанавливает, что в квантовой теории дополнительные условия (слабые уравнения) суть ограничения на выбор допустимых волновых функций. Более того, в этой работе Дирак трактует как дополнительное условие на волновую функцию и само волновое уравнение Шредингера, найдя ему тем самым естественное место в создаваемой схеме.

А понадобилось Дираку уравнение Шредингера, чтобы

разобраться, как описывать в квантовой теории системы из нескольких одинаковых частиц—его первая попытка выполнить это в гейзенберговской картине*) оказалась неудачной. Теперь получается, что на языке волновых функций требование отразить в математическом аппарате физическую неразличимость состояний, отличающихся лишь перестановкой какой-либо пары частиц, легко удовлетворить. Для этого надо просто ограничить физически допустимые волновые функции или только симметричными относительно перестановки любой пары частиц, или только антисимметричными относительно таких перестановок. Неожиданное появление *двух* возможностей вместо *одной* очень смущает Дирака, и он сетует на отсутствие аргументов для ликвидации этого произвола.

Применение развитых соображений к ансамблю заключенных в некоторый объем молекул идеального газа приводит при симметричном выборе к статистике Эйнштейна — Бозе. При антисимметричном выборе — из которого, в частности, следует выполнение принципа исключения Паули — получается новая статистика — теперь мы называем ее *статистикой Ферми — Дирака*. Дирак находит для этого случая основные термодинамические функции, закон распределения и т. п.

Несколько чужеродным и искусственно присоединенным к работе выглядит последний параграф, что отнюдь не уменьшает его значения. В нем построена общая схема зависящей от времени теории возмущений, которую в некотором смысле можно рассматривать как обобщение метода вариации произвольных постоянных в теории линейных дифференциальных уравнений.

Цель следующей статьи № 3 **ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КВАНТОВОЙ ДИНАМИКИ** — установить общее правило, как из q -чисел можно получить s -числа, отвечающие на физические вопросы, и на какие именно. Для этого нужно уметь работать и с матрицами, строки и столбцы которых нумеруются непрерывно меняющимися значениями переменных. Того ради вводятся δ -функция и все правила обращения с ней. Использование техники δ -функций, очень плодотворное практически, долго не признавалось математиками**), считавшими все произ-

*) Dirac P. A. M. // Proc. Roy. Soc. A. — 1926. — V. 110. — P. 561.

**) Так, фон Нейман, чтобы избежать ее применения, регулярно прибегает к гораздо более громоздким конструкциям с интегральными разложениями единицы.

водимые с их помощью вычисления совершенно бессмысленными, пока уже в послевоенные годы оно не нашло своего обоснования в теории обобщенных функций.

Далее следует рассуждение, заставляющее вспомнить использованное в первой работе. Аксиоматическое определение осуществляющих гейзенбергову схему матриц фиксирует их только с точностью до канонического преобразования. Физически отдельные связанные каноническими преобразованиями матричные схемы различаются тем, какие динамические переменные описываются в них диагональными матрицами, а значения этих переменных могут служить для нумерации строк и столбцов. Сама же матрица преобразования—это полная система волновых функций одного набора переменных, выраженных в функции переменных другого набора. Таким образом, уже в этой статье развивается система понятий и обозначений, в точности такая же—кроме еще не придуманных угловых скобок,—как в последних изданиях книги Дирака.

Далее, поиски преобразования к представлению, в котором диагональна некоторая заданная функция координат и импульсов, сводятся к решению задачи на собственные значения. В частности, поиски представления, в котором диагонален H , ведут к решению уравнения Шредингера—стационарного или зависящего от времени.

В заключение Дирак специально подчеркивает, что с его точки зрения в квантовом описании сохраняется полная причинность: полное задание начального состояния полностью определяет состояние системы в любой последующий момент времени. Понятие вероятности появляется только в том случае, если оно введено в описание начального состояния тем, что его фаза неизвестна. В этом можно видеть элемент дискуссии с общепринятыми взглядами Бора, связанный, возможно, с тем, что работа выполнялась во время пребывания Дирака в Копенгагене.

В знаменитой статье КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ИСПУСКАНИЯ И ПОГЛОЩЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ (№ 4), дату публикации которой считают днем рождения квантовой теории полей, главное—это, конечно, открытие *метода вторичного квантования*. По позднейшему свидетельству самого Дирака, исходным пунктом ему послужила своеобразная «игра с уравнением Шредингера», заставившая его задаться вопросом, «что произойдет, если сделать волновую функцию набором некоммутирующих величин». Эту "игру" он начинает с коэффициентами разложения полного решения по невозмущенным функциям (введен-

ными в "чужеродном добавке" статьи 2—зависящей от времени теории возмущений), замечая, что уравнения для них естественно принимают гамильтонову форму. Поскольку сформулированные в первой работе правила квантового расширения классической теории как раз и требовали квантования уравнений Гамильтона (видишь скобку Пуассона — замени ее коммутатором!), то было бы, по-видимому, просто непростительным не попробовать, к чему приведет эта процедура для возмущаемого ансамбля одинаковых систем. Результат оказался знаменательным. Новое описание ансамбля совпало со старым квантово-механическим описанием не ансамбля независимых систем, но ансамбля систем, подчиняющихся статистике Эйнштейна—Бозе,— процедура этого *вторичного квантования* (термин впервые употреблен, по-видимому, В. А. Фоком) автоматически выделяла из всех волновых функций только *симметричные* в перестановках систем (и совершала переход к другой матричной схеме, в которой строки и столбцы нумеруются значениями чисел заполнения).

В работе разобран и еще один важный для техники вопрос: выведены формулы для вероятности перехода в непрерывном спектре и выражения эффективного сечения через матричные элементы. Для этой цели существенно понадобился развитый в статье 3 формализм δ -функций и матриц с непрерывными индексами.

После всей этой предварительной работы переход к решению сформулированной в заглавии задачи потребовал только прямолинейного применения метода к разложенному на осцилляторы электромагнитному полю, взаимодействующему с источником, и позволил впервые вычислить коэффициенты A и B Эйнштейна последовательным, не опирающимся на принцип соответствия образом. При этом было установлено, что «гамильтониан, описывающий взаимодействие атома с электромагнитными волнами, можно сделать совпадающим с гамильтонианом задачи о взаимодействии атома с ансамблем частиц, движущихся со скоростью света и подчиняющихся статистике Эйнштейна—Бозе»,— была снята проблема корпускулярно-волнового дуализма.

Однако основное значение этой работы Дирака состоит в том, что в ней возник совершенно новый физический объект—*квантованное поле*, удовлетворяющее уравнениям классической электродинамики, но имеющее своими значениями квантово-механические операторы, действующие на шредингерову функцию, которую в этом случае часто

называют амплитудой состояния. Надо сказать, что Дирак отнюдь не считал, что сделал решающий шаг на пути построения квантовой электродинамики. Ему представлялось, что на этом пути лежат еще такие препятствия, как отсутствие понимания природы создания электромагнитного поля движущимся электроном и обратного действия этого поля на него (не было даже ясности, относятся ли эти вопросы к квантовому или классическому описанию; в статье 10 Дирак предпримет попытку квантового рассмотрения, в 1939 году в работе «Классическая теория излучающего электрона» он установит, что часть проблемы поддается классическому анализу) и, главное, проблема совмещения квантового описания с требованиями теории относительности. Эта последняя будет еще долго занимать его внимание, но уже в следующем году попытка преодолеть ее приведет Дирака к важнейшему, может быть, из его физических открытий.

Речь идет, конечно, об *уравнении Дирака*, составляющем предмет двух работ, № 5 и № 6 под одинаковым названием КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОНА. Мысль Дирака опять движется по пути точного выполнения «правил игры». Чтобы применить разработанный прием расширения для перехода от классического описания к квантовому, классическая теория должна быть сформулирована в гамильтоновой форме. Но теория относительности требует, чтобы энергия и импульсы выступали бы совершенно симметрично. Значит, линейно входящий в гамильтоновы уравнения гамильтониан должен в релятивистской теории линейно выражаться через импульсы. На этом месте всякий трезвомыслящий человек говорит: «Стоп! Этого не может быть, потому что мы знаем, что это не так. Явная релятивистская симметрия выполняется для *квадратов* энергии и импульсов. Сама же энергия выражается через импульсы неуклюжим квадратным корнем $\pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + (mc)^2}$ ».

Если верить А. Конан Дойлю*), знаменитый сыщик Шерлок Холмс говорил: «Надо исключить все, явно невозможное. Тогда то, что останется, будет истиной, какой бы неправдоподобной она ни казалась**»). Примем неправдоподобное — запишем энергию в виде линейной формы

*) *Конан Дойль А.* Сочинения.— М.: Правда, 1966.— Т. 1.— С. 515.

***) Очень хороший рецепт, если только еще знать, как отличить невозможное от неправдоподобного.

импульсов. При возведении в квадрат должна была бы восстановиться стандартная релятивистская связь, чего, как известно, не происходит—не происходит, если коэффициенты формы суть нормальные c -числа. Значит, заключает Дирак, коэффициенты должны быть q -числами (больше ничего нет). Найти же четыре взаимно антикоммутирующих q -числа не составляет труда; их минимальное матричное представление четырехрядно.

Так было открыто знаменитое уравнение. Это открытие—целая глава в истории современной физики, оно повлекло за собой глубокое изменение ряда основных наших представлений.

Прежде всего, согласно общим правилам физической интерпретации q -чисел, строки и столбцы матриц должны нумероваться значениями каких-то физических величин, т. е. в описании электрона кроме его координат и импульсов должны участвовать еще и какие-то новые переменные, различающие своими значениями $4 = 2 \times 2$ состояния. Для *одной* пары значений интерпретация уже существовала в искусственно введенном Дж. Уленбеком и С. Гаудсмитом—для объяснения обнаруженного опытным путем "удвоения" числа состояний электронов в атомах—представлении о спине. Уравнение Дирака дало спину естественное объяснение как внутренней степени свободы, неизбежно следующей из релятивистской кинематики (не надо упускать из вида, что это уравнение воспринималось после своего открытия, как *единственно возможное* уравнение для релятивистской частицы), и это сразу же было расценено как очень большой успех.

Распознавание смысла второй пары значений тоже не составило труда—для каждого набора значений импульсов были возможны два знака одинаковой по модулю энергии, точно передающих два возможных знака квадратного корня в обычном выражении. Но *физическое истолкование* такой двузначности нашлось далеко не сразу, и сперва она рассматривалась как тяжелейший дефект, указывающий на безусловно предварительный характер теории. Очень показательно, что, демонстрируя возможности своего уравнения в вычислении эффектов, Дирак ограничивается в обеих работах 5 и 6 только приближенными выкладками. «Я слишком опасался,—вспоминал он много лет спустя по свидетельству Д. Мехра*),— считать метод точным, потому что он мог бы дать

*, Мехра Д. // УФН.—1987.— Т. 153.— С. 156.

неожиданные результаты, что заставило бы отказаться от всей теории».

Только через два года, по-видимому, убедившись за это время, что просто исключить из теории состояния отрицательной энергии невозможно, Дирак предлагает в работе ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОНОВ И ПРОТОНОВ (№ 7) совершенно неожиданный способ их физического истолкования. Он делает очень смелое предположение, что в нашем мире почти все состояния отрицательной энергии уже заняты и поэтому переходы в них согласно принципу Паули невозможны, но что создаваемая таким фоном бесконечная плотность заряда ненаблюдаема, а на опыте проявляются только отклонения от нее. Тогда дырки в таком распределении должны будут вести себя как частицы положительной энергии и положительного заряда. Единственными известными тогда положительно заряженными элементарными частицами были протоны, и Дирак предлагает отождествить дырки в распределении электронов с протонами, в надежде, что в будущем теория объяснит разность масс протона и электрона за счет взаимодействия. Таким образом, получалась исключительно красивая модель, в которой единственное уравнение описывало все имеющиеся в природе элементарные частицы.

Однако несмотря на свою привлекательность, модель, как говорят, не прошла. Если протон — это дырка в фоне, т. е. свободное состояние отрицательной энергии, то электрон положительной энергии может в него упасть, и электрон с протоном при встрече должны аннигилировать, испуская два γ -кванта. Соответствующие вычисления проделаны Дираком в работе К АННИГИЛЯЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ И ПРОТОНОВ (статья 8) и привели для вероятности аннигиляции к безумно высокому значению, заведомо исключающему возможность стабильного существования обычной материи из электронов и протонов (расчет Дирака дал правильную формулу для вероятности аннигиляции электронов и позитронов). Далее, в 1931 году Г. Вейль пришел с помощью симметричных соображений к выводу, что масса дырки должна в точности равняться массе электрона — дырки не могли быть протонами.

Решающий шаг был сделан Дираком еще через год в длинном введении к статье № 9 КВАНТОВАННЫЕ СИНГУЛЯРНОСТИ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ, основной сюжет которой мы еще будем обсуждать ниже. (Тут стоило бы отметить одно нестандартное обыкновение Дирака. К работе, посвященной некоторой теме, он при-

соединяет фрагмент, трактующий совершенно другой предмет—мы уже отмечали это во второй статье. Это напоминает эпистолярный прием: "Пользуюсь случаем, чтобы рассказать Вам...".) Резюмируя неудачу попытки отождествить дырки с протонами и присоединяясь к предложению Р. Оппенгеймера считать, что в нашем мире *все* состояния отрицательной энергии заняты электронами, Дирак пишет: «Дырка, если бы такая была, была бы частицей нового сорта, не известной экспериментальной физике, обладающей той же массой, что и электрон, но противоположным зарядом. Можно назвать такую частицу анти-электроном». И далее: «Протоны с такой точки зрения совершенно не связаны с электронами. Можно думать, что у протонов будут их собственные состояния отрицательной энергии, которые нормально все заняты, а незанятое будет появляться, как анти-протон».

Нельзя сказать, чтобы сделанное Дираком предсказание существования еще не известных частиц было встречено с большим энтузиазмом. Паули, который как раз заканчивал свой известный обзор по квантовой механике*), написал по этому поводу: «Этот выход является уже потому неудовлетворительным, что законы природы в этой теории совершенно симметричны относительно электронов и антиэлектронов. Но тогда фотоны γ -излучения . . . могут спонтанно превращаться в электрон и антиэлектрон. Мы не думаем, чтобы намеченный путь мог быть серьезно принят во внимание», а про Л. Д. Ландау легенда утверждает, что он занес Дирака на *черную доску*. "Научное общественное мнение" переменялось только после открытия позитрона.

Хотя Паули в процитированном выше отрывке и поставил Дираку в упрек совершенную симметрию относительно электронов и антиэлектронов, в действительности в 1931 году эта симметрия еще не была достигнута. В сколько-нибудь завершенной форме она будет сформулирована только через три года в работе № 14 ОБСУЖДЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ТЕОРИИ ПОЗИТРОНОВ путем бесконечной перенормировки матрицы плотности.

Объяснение смысла спина и тут же подтвержденное опытом предсказание новой частицы—позитрона были, конечно, великолепными зримыми результатами постро-

*) Русский перевод: Паули В. Общие принципы волновой механики.— М.: Гостехиздат, 1947.

енной Дираком теории. Но еще более существенным было ее влияние на общее физическое мировоззрение. Двадцатому веку досталась в наследство двойственная картина мира, в которой противопоставлялись частицы, обладавшие еще со времен древнегреческих атомистов наглядными свойствами непроницаемости и неуничтожимости, и поля — электромагнитное и гравитационное, переносящие силы взаимодействия частиц, которые этими частицами создаются и уничтожаются. Принято было четко различать материю и излучение. Корпускулярно-волновой дуализм нерелятивистской квантовой механики начал расшатывать эту противоположность, но основное свойство частиц — неуничтожимость — оставалось непоколебленным. (Очень показательно в этом смысле, что, когда Дирак работает в статье 4 с корпускулярной картиной фотонов, он принимает, что в состоянии с нулевыми энергией и импульсом имеется бесконечный запас фотонов, так что не приходится прибегать к представлению об их рождении или уничтожении.) В теории Дирака (в несимметричной относительно электронов и позитронов картине) это свойство не нарушается и при рождении или уничтожении пары — электрон просто переходит с отрицательного уровня на положительный или с положительного на отрицательный. Но при симметричном описании никакого бесконечного запаса электронов отрицательной энергии уже нет. Приходится принять, что — первый кардинальный вывод —

в релятивистской квантовой теории частицы *материи* (электроны и позитроны) могут рождаться и уничтожаться подобно квантам электромагнитного *излучения*,

только, чтобы не нарушились законы сохранения, это происходит парами. Второй же кардинальный вывод состоит в окончательном выяснении природы происходящего при переходе к уравнению Дирака второго удвоения числа состояний, т. е. в конечном счете — смысла двух знаков корня в релятивистском выражении для энергии:

для всякой заряженной релятивистской частицы обязательно существует двойник — *античастица*, отличающаяся от частицы только знаком заряда.

Наконец, в той же статье есть еще один результат, существенно определивший дальнейший ход развития релятивистской квантовой теории. Дирак заново открыл

(не только для физиков, но и для интересующихся физической математикой) новый класс неприводимых представлений группы Лоренца — спиноры. Любопытно, что сам он этому придавал, по-видимому, так мало значения, что даже не выписал явно закон преобразования своих волновых функций при преобразовании Лоренца, ограничившись, в лучшем математическом стиле, доказательством теоремы существования такого линейного преобразования компонент ψ , после совершения которого уравнение принимает в новой системе отсчета прежнюю форму. Само слово *спинор* было придумано П. Эренфестом, обратившимся летом 1929 года к Б. Ван-дер-Вардену с недолгим вопросом: «Существует ли подобно тензорному анализу доступный для изучения спинорный анализ?»*), ответом на который явилась работа Ван-дер-Вардена «Спинорный анализ»**), и только несколько лет спустя выяснилось, что в чистой математике аналогичные величины были открыты Э. Картаном***) шестнадцатью годами раньше.

Статья 9 нашего сборника КВАНТОВАННЫЕ СИНГУЛЯРНОСТИ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ опять иллюстрирует две характерные особенности научного творчества Дирака. Первая — это неуклонное стремление извлечь из сделанных предположений все возможные логические следствия, сколь бы неожиданными они ни были, стремление неограниченно распространять развитие теории, следуя лишь ее естественной внутренней структуре. В работе № 9 он отталкивается от того известного факта, что обычная квантово-механическая схема содержит принципиально ненаблюдаемый элемент в виде фаз волновых функций, пропадающих при образовании всех билинейных выражений типа $(\dots | \dots | \dots)$. От него Дирак переходит к менее тривиальному замечанию, что эти произвольные фазы могут быть неинтегрируемыми, и в таком случае описывают движение заряженной частицы в электромагнитном поле. Существенно нетривиальным является следующий логический шаг, использующий то обстоятель-

*) *Van der Warden B. L.* // Theoretical Physics in the Twentieth Century.— New York; London: Intersci. Publishers, 1960.— P. 199; перевод: *Ван-дер-Варден Б. Л.* // Теоретическая физика XX века.— М.: ИЛ, 1962.— С. 231.

**) *Van der Warden B. L.* Spinoranalyse // Goett. Nachr. Math.-Phys. Kl.— 1929.

***) *Cartan E.* // Bull. Soc. Math. de France.— 1913.— V. 41.— P. 53.

ство, что фаза по самому смыслу определена лишь по модулю 2π . Оказывается, что благодаря этому та же самая схема описывает и движение частиц в поле более общего строения, чем классическое электромагнитное, а именно, имеющего своими источниками не только заряды, но и изолированные магнитные полюса (теперь говорят—*монополи*). Их "силы" μ не могут быть произвольными, но обязаны быть целыми кратными "кванта силы магнитного полюса" μ_0 , связанного с элементарным зарядом e соотношением $e\mu_0 = c/2$ —т. е. наличие в мире хотя бы одного магнитного полюса привело бы к наблюдаемому на опыте квантованию электрического заряда.

Далее следует чрезвычайно характерное для Дирака рассуждение: «... квантовая механика не исключает существования изолированных магнитных полюсов. Напротив, существующий формализм квантовой механики, будучи развит естественным образом, без наложения произвольных ограничений, неизбежно приводит к волновым уравнениям, единственная физическая интерпретация которых—это движение электрона в поле одиночного полюса. Это новое развитие не требует *никакого изменения* в формализме ... При таких обстоятельствах было бы удивительно, если бы Природа не использовала этой возможности».

Вторая, проявившаяся в связи с этой работой, характерная черта—это уже отмечавшееся нами постоянство интереса Дирака к любой проблеме, если он не считал ее исчерпанной до конца. Статья 9 написана в 1931 году. Семнадцать лет спустя (почти по Дюма) он возвратился к этой теме в работе ТЕОРИЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЮСОВ (№ 16), в которой он строит полную схему расширенной присутствием монополей электродинамики.

Задача экспериментальной проверки гипотезы существования монополей оказалась достаточно сложной. Уже ряд лет предпринимаются попытки обнаружить их на опыте, которые не привели пока к определенным результатам. Тем временем аналогичные предположения были введены и в теорию калибровочных полей Янга—Миллса, где они играют важную роль.

Следующие две статьи—№ 10 РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА и написанная совместно с В. А. Фоком и Б. Подольским № 11 К КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ—продолжают построение квантовой электродинамики, начатое в четвертой статье. Мы уже отмечали, что Дирак не был склонен высоко оценивать

принципиальное значение последней работы, считая ее имеющей скорее рецептурный характер. Неудовлетворительным представлялся ему и подход Гейзенберга и Паули *), которые «рассматривают само поле как динамическую систему, поддающуюся гамильтоновой трактовке ... Поле,— требует Дирак,— должно было бы появиться в теории как нечто более элементарное и фундаментальное». Тем не менее, при внимательном изучении очень длинного — оно занимает половину статьи № 10 — идеологического введения создается впечатление, что у Дирака не было ясного представления, что же именно надо улучшать (или делать заново **)).

Вместо обычной для его статей четкой, не оставляющей путей для уклонения в сторону, цепи логических аргументов, мы встречаем сперва довольно расплывчатые соображения о природе релятивистских наблюдений, затем гораздо более четкий анализ недоопределенности, имеющейся еще в классической задаче об электро-не, взаимодействующем с полем излучения. Спустя семь лет эта классическая часть проблемы приведет его к *классическому уравнению Дирака для точечного электрона ***)*, но и почти через двадцать лет она будет представляться ему по-прежнему неопределенной: «Трудности современной квантовой электродинамики надо было бы,— напишет Дирак в 1951 году ****), — по моему мнению, приписать в первую очередь не ошибочности основных принципов квантования, но тому, что мы работаем, исходя из неверной классической теории». Пока же Дирак предпринимает героическую попытку избежать классической неопределенности выбором способа квантования.

Он предлагает записывать для каждой частицы свое релятивистское уравнение движения во внешнем электромагнитном поле со своими координатами и *временем*, в котором ψ -функция зависит как от координат и *времен*

*) Heisenberg W., Pauli W. // Zs. Phys.— 1929.— Bd 56.— S. 1; Bd 59.— S. 168; Перевод: Паули В. Труды по квантовой теории.— М.: Наука, 1977.— Т. 2.— С. 30 и 89.

**) Иосм Р. (Jost R., loc. cit.) передает это впечатление изящно-дипломатической фразой: «Дирак, направляемый такими общими соображениями, которые обладают определенной прелестью и вызывают хотя смутные, но очаровывающие ассоциации с сокровенными связями между электромагнитным полем и локализацией, предлагает следующие уравнения ...».

***) Dirac P. A. M. Классическая теория излучающих электронов // Proc. Roy. Soc. A.— 1939.— V. 167.— P. 148—169.

****) Dirac P. A. M. Новая классическая теория электронов // Proc. Roy. Soc. A.— 1951.— V. 209.— P. 291—296.

всех частиц, так и от переменных, описывающих электромагнитное поле. Последнее считается свободным и представляется в виде суперпозиции *только поперечных* волн. На простейшем скалярном одномерном примере было продемонстрировано, что во втором приближении теории возмущений восстанавливается кулоново взаимодействие между заряженными частицами.

Предложенная новая формулировка электродинамики вызвала большой интерес, в частности и у нас в стране, но вскоре было показано, что она эквивалентна формулировке Гейзенберга—Паули. Яснее всего это сделано в работе № 11, в которой новый способ—он получил имя *многовременного формализма*—разработан последовательно и со всей полнотой. Суть его, как выяснилось, состоит в том, что n заряженных частиц описываются в $4n$ -мерном конфигурационном пространстве, в то время как для поля применяется вторичное квантование и совершается—в современной терминологии—переход к представлению взаимодействия. Многовременной формализм выглядел существенно проще формализма Гейзенберга—Паули и, главное, обладал явной релятивистской инвариантностью, достигнутой за счет того, что в $4n$ -мерном (в отличие от $(3n + 1)$ -мерного) конфигурационном пространстве сохраняется инвариантность уравнения для каждой частицы. Этим определилась популярность метода—на полтора десятилетия, вплоть до работ Швингера и Фейнмана, он сделался основным рабочим инструментом релятивистских квантовых вычислений.

Мы упомянули имя Р. П. Фейнмана. Оно теснейшим образом связано со статьей ЛАГРАНЖИАН В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ. Эга, 12-я, статья, пожалуй, единственная, в которой Дирак изменил своей первой любви, нарушил неизменную верность гамильтонову формализму и обратился к лагранжеву пути построения квантовой теории. Может быть поэтому она и представляет единственный пример, когда блеснувшая у Дирака идея не была в конце концов доведена до всех мыслимых логических следствий им самим, но была подхвачена—опять полтора десятка лет спустя—другим человеком. Жалеть об этом не приходится: Фейнман сделал из идеи Дирака новую—третью—форму квантовой механики, которая оказалась, в частности, самой удобной для современных построений в квантовой теории полей.

В 1933 году на 7-м Сольвейском конгрессе Дирак сделал доклад о теории позитрона (№ 13), в котором

он предвосхитил ряд выводов послевоенной теории перенормировок. Он вычислил поляризацию электронно-позитронного вакуума электростатическим полем, выяснил, что она расходится логарифмически, и предложил обрезать интеграл на $137 mc^2$; отметил, что вследствие поляризации вакуума наблюдаемый при низких энергиях заряд меньше истинного, и предсказал его логарифмическое возрастание с ростом энергии, т. е. фактически ввел понятие *эффективного заряда*.

Мы уже отмечали, что Дирака постоянно беспокоила проблема естественной инкорпорации потребного для квантования гамильтонова формализма в круг понятий и представлений, свойственных теории относительности. В работе № 17 ФОРМЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ он, прежде всего, ввел в научный оборот условие релятивистской ковариантности в форме выполнения правильных СП-соотношений между сконструированными из динамических переменных рассматриваемой системы генераторами неоднородных преобразований Лоренца—десятью *фундаментальными величинами*. Таким образом, условия ковариантности оказались сформулированными на гамильтоновом языке.

Но что должно играть в релятивистской теории роль гамильтонова времени? Ведь обычные времена могут быть разными для разных элементов системы и должны входить симметрично с пространственными координатами. Несмотря на 4-мерную симметрию, в *псевдоевклидовом* мире Минковского есть выделенный класс—пространственноподобных—гиперповерхностей, и если образовать однопараметрическое семейство пространственноподобных гиперповерхностей, таких, что через каждую 4-точку проходит одна и только одна гиперповерхность, то параметр этого семейства сможет принять желаемую роль на себя. Такая конструкция сохраняет особую роль времени, не нарушая релятивистской симметрии*). В рамках специальной теории относительности преимущественное удобство представляют такие гиперповерхности, которые переходят сами в себя под действием преобразований, индуцируемых некоторыми из генераторов группы 4-движений. Дирак выясняет, что есть три класса гиперповерхностей, удовлетворяющих такому пожеланию; соответственно возникают три формы динамики: *мгновенная* (общепо-

*) Аналогичный ход мысли привел в те же годы к построению уравнения Томонага—Швингера в инвариантной теории возмущений.

требительная), *точечная* и *фронтальная* — последняя нашла себе применение в последние годы в некоторых построениях теории элементарных частиц.

Наконец, в этой работе поставлена очень интересная проблема о возможности существования прямых релятивистских взаимодействий частиц, без посредства промежуточного агента — поля. Она породила богатую литературу, но не нашла до сих пор четкого решения.

Последние три статьи составляют серию, в которой Дирак развивает гамильтонову динамику систем со связями. В первой из них, № 18 **ОБОБЩЕННАЯ ГАМИЛЬТОНОВА ДИНАМИКА**, Дирак вводит новые понятия, позволяющие, как он полагает, внутренне непротиворечиво сформулировать "правила игры" в процедуре перехода от лагранжева к гамильтонскому описанию при наличии связей. Это, прежде всего, понятия сильных (обычных) и слабых (выполняющихся с точностью до некоторой линейной комбинации связей) уравнений. Доказательства непротиворечивости новых правил игры Дирак не дает; как всегда, непостижимым образом в его рассуждениях и конструкциях сомнительные ситуации просто не попадают.

Далее Дирак последовательно трактует как уравнения связей любые следствия уравнений движения, представимые в виде соотношений только между координатами и импульсами. Описав (на "словесном" уровне) процедуру выявления всех таких соотношений, он вводит дальнейшую серию новых понятий: разделение динамических величин на величины первого и второго рода; новая скобка Пуассона, которую сейчас мы называем *скобкой Дирака*. Замечательны также рассуждения, в которых он характеризует геометрию фазового пространства в условиях калибровочной свободы: здесь он приходит к понятию слоения. Наконец, Дирак строит квантовые аналоги сильных и слабых уравнений, возвращаясь к идеям статьи № 2, где он называл их тождествами и уравнениями, соответственно.

Следует заметить, что по сравнению с общеизвестными «Лекциями по квантовой механике» эта статья производит более глубокое впечатление. В ней больше технических деталей, проясняющих ход мысли Дирака и демонстрирующих его удивительную целеустремленность.

Две последние статьи сборника содержат технические усовершенствования новой схемы. В первой из них № 19 **ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМА ПОЛЕВОЙ ДИНАМИКИ**,

развит вычислительный аппарат, позволяющий применить обобщенную динамику к релятивистским системам. Здесь Дирак в полной мере использует предложенные им ранее (статья 17) методы описания полевой динамики. Во второй, № 20 **ОБОБЩЕННАЯ ГАМИЛЬТОНОВА ДИНАМИКА**, изучена проблема произвола в обобщенной гамильтоновой динамике и (на примере связей, линейных по импульсам) описана идея редукции числа степеней свободы в результате исключения связей второго рода.

Перевод статей был сделан А. Б. Кожевниковым, В. П. Павловым, М. К. Поливановым и В. П. Шелестом. При его выполнении мы стремились к максимально бережной передаче английского текста, отдавая, в случаях необходимости, точности перевода приоритет перед традиционными требованиями русской стилистики.

Б. В. Медведев

В заключение нам хотелось бы привести список некоторых работ Дирака по квантовой теории, которые не удалось включить в настоящее издание:

1. Quantum Mechanics and a Preliminary Investigation of the Hydrogen Atom // Proc. Roy. Soc., London. Ser. A. V. 110. P. 561—579.
2. The Elimination of the Nodes in Quantum Mechanics // Ibidem. V. 111. P. 281—305.
3. Relativity Quantum Mechanics with an Application to Compton Scattering // Ibidem. P. 405—423.
4. On Quantum Algebra // Proc. Cambr. Phil. Soc. V. 23. P. 412—418.
5. The Compton Effect in Wave Mechanics // Proc. Cambr. Phil. Soc. V. 23. P. 500—507.
6. The Quantum Theory of Dispersion // Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. P. 710—728.
7. Uber die Quantenmechanik der Stossvorgange // Zs. Phys. Bd 44. S. 585—595.
8. The Basis of Statistical Quantum Mechanics // Proc. Cambr. Phil. Soc. V. 25. P. 62—66.
9. Quantum Mechanics of Many—Electron Systems // Proc. Roy. Soc., London, Ser. A. V. 123. P. 714—733.
10. Note on Exchange Phenomena in the Thomas Atom // Proc. Cambr. Phil. Soc. V. 26. P. 376—385.
11. The Proton // Nature. V. 126. P. 605.
12. Note on the Interpretation of the Density Matrix in the Many Electron Problem // Proc. Cambr. Phil. Soc. V. 27. P. 240—243.
13. Homogeneous Variables in Classical Dynamics // Proc. Cambr. Phil. Soc. P. 389—401.

14. Theory of Electrons and Positrons // Nobel Lectures: Physics, 1922—1941.— Amsterdam: North-Holland, 1965.— P. 320—325.
15. Relativistic Wave Equations // Proc. Roy. Soc., London. Ser. A. V. 155. P. 447—459.
16. The Reversal Operator in Quantum Mechanics // Изв. АН СССР. ОМЭН. Сер. физ. № 4—5. С. 569—575 (англ.), 576—582 (перевод).
17. Complex Variables in Quantum Mechanics // Proc. Roy. Soc., London, Ser. A. V. 160. P. 48—59.
18. La théorie de l'électron et du champ électromagnétique // Ann. Inst. H. Poincaré. T. 9. P. 13—49.
19. The Physical Interpretation of Quantum Mechanics (Bakerian Lecture 1941) // Proc. Cambr. Phil. Soc. V. 38. P. 193—200 (R. Peierls M. H. L. Pryce).
20. Quantum Electrodynamics // Commun. Dublin Inst. Adv. Stud. Ser. A. No. 1.— P. 1—36.
21. Developments in Quantum Electrodynamics // Commun. Dublin Inst. Adv. Stud. Ser. A. No. 3. P. 1—33.
22. La seconde quantification // Ann. Inst. H. Poincaré. T. 11. Nr 1. P. 15—47.
23. Gauge-invariant Formulation of Quantum Electrodynamics // Can. J. Phys. V. 38. P. 650—660.
24. The Vacuum in Quantum Electrodynamics // Nuovo Cimento (10). Suppl. V. 6. P. 322—339.
25. The Conditions for a Quantum Field Theory to Be Relativistic // Rev. Mod. Phys. V. 34. P. 592—596.
26. Quantum Electrodynamics without Dead Wood // Phys. Rev. Ser. B. V. 139. P. 684—690.

1. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ ¹⁾

Proceedings of the Royal Society
A vol. 109 (1925), pp. 642—653

THE FUNDAMENTAL EQUATIONS OF QUANTUM MECHANICS

By P. A. M. DIRAC, 1851 Exhibition Senior Research Student,
St. John's College, Cambridge

(Communicated by R. H. Fowler, F. R. S.— Received November 7 th, 1925)

§ 1. Введение

Хорошо известно, что экспериментальные факты атомной физики принуждают к отклонениям от классической электродинамической теории при описании атомных явлений. Эти отклонения принимают, в теории Бора, форму специальных предположений о существовании у атома стационарных состояний, в которых он не излучает, и определенных правил, называемых квантовыми условиями, которые фиксируют стационарные состояния и частоты излучения, испускаемого при переходах между ними. Эти предположения совершенно чужды классической теории, но оказались чрезвычайно плодотворными при интерпретации ограниченной области атомных явлений. Единственно, как используется классическая теория,— это через предположение, что классические законы выполняются для описания движения в этих стационарных состояниях (хотя они и отказывают полностью во время переходов) и через предположение, называемое Принципом Соответствия, что классическая теория дает правильные результаты в том предельном случае, когда действие за период движения системы велико сравнительно с постоянной Планка h , равно как и в некоторых других особых случаях.

В недавней работе ²⁾ Гейзенберг выдвинул новую теорию, основанную на тех соображениях, что это не уравнения классической механики завели нас на ложную

¹⁾ Перевод с английского В. П. Павлова.

²⁾ *Heisenberg // Zs. Phys.*— 1925.— Bd 33.— S. 879.

дорогу, а что математические операции, посредством которых из них выводятся физические результаты, требуют модификации. Вся информация, следующая из классической теории, может быть таким образом использована в новой теории.

§ 2. Квантовая алгебра

Рассмотрим многократно-периодическую невырожденную динамическую систему с u степенями свободы, определенную уравнениями, связывающими координаты и их производные по времени. В классической теории мы можем решить такую задачу следующим образом. Примем, что каждая из координат x может быть разложена в многократный ряд Фурье по времени t , так что

$$x = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_u} x(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_u) \exp(i(\alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2 + \dots + \alpha_u \omega_u) t),$$

скажем для краткости,

$$x = \sum_{\alpha} x_{\alpha} \exp i(\alpha \omega) t.$$

Подставим эти выражения в уравнения движения и приравняем коэффициенты при каждой гармонике в обеих частях. Полученные таким образом уравнения (которые мы будем называть A -уравнениями) определяют каждую из амплитуд x_{α} и частот $(\alpha \omega)$ (измеряемых в радианах в единицу времени). Решение не будет единственным. Будет существовать u -кратная бесконечность решений, которые можно пронумеровать, считая амплитуды и частоты функциями u постоянных $\kappa_1, \dots, \kappa_u$. Каждая x_{α} и $(\alpha \omega)$ будет теперь функцией двух наборов чисел, α и κ , и может быть записана как $x_{\alpha \kappa}, (\alpha \omega)_{\kappa}$.

В квантовом решении задачи мы, согласно Гейзенбергу, по-прежнему принимаем, что каждую координату можно представить гармоническими компонентами вида $\exp i \omega t$ (с амплитудой и частотой каждой, зависящими от двух наборов чисел, n_1, \dots, n_u и m_1, \dots, m_u , в этом случае всегда целых), записываемыми как $x(nm)$ и $\omega(nm)$. Разности $n_r - m_r$ отвечают прежним α_r , но ни числа n , ни какие бы то ни было функции от n и m не играют роли прежних κ в определении того, какому решению принадлежит каждая частная гармоническая компонента. Нельзя, например, собрать все компоненты, для которых все числа n

относятся к некоторому избранному набору значений, и сказать, что они сами по себе образуют одно полное решение уравнений движения. Квантовые решения все взаимосвязаны и должны рассматриваться как единое целое. Математический эффект этого состоит в том, что в то время как в классической теории каждое из A -уравнений— это соотношение между амплитудами и частотами, относящимися к одному частному набору κ , амплитуды и частоты, входящие в квантовое A -уравнение, не принадлежат одному частному набору значений чисел или каких-либо функций от n и m , но определяющие их n и m связаны специальным образом, который будет указан ниже.

В классической теории есть очевидное соотношение:

$$(\alpha\omega)_{\kappa} + (\beta\omega)_{\kappa} = (\alpha + \beta, \omega)_{\kappa}.$$

Следуя Гейзенбергу, мы принимаем, что соответствующим соотношением в квантовой теории будет

$$\omega(n, n - \alpha) + \omega(n - \alpha, n - \alpha - \beta) = \omega(n, n - \alpha - \beta)$$

или

$$\omega(nm) + \omega(mk) = \omega(nk). \quad (1)$$

Это значит, что $\omega(nm)$ имеет форму $\Omega(n) - \Omega(m)$, где Ω — уровни частоты. В теории Бора это были бы умноженные на $2\pi/h$ уровни энергии, но нам нет нужды в таком допущении.

В классической теории мы можем перемножить две гармонические компоненты, относящиеся к одному набору κ , записывая

$$a_{\alpha\kappa} \exp(i(\alpha\omega)_{\kappa} t) b_{\beta\kappa} \exp(i(\beta\omega)_{\kappa} t) = (ab)_{\alpha+\beta, \kappa} \exp(i(\alpha + \beta, \omega)_{\kappa} t),$$

где

$$(ab)_{\alpha+\beta, \kappa} = a_{\alpha\kappa} b_{\beta\kappa}.$$

Аналогичным образом в квантовой теории мы можем перемножить компоненты (nm) и (mk) :

$$a(nm) \exp(i\omega(nm) t) b(mk) \exp(i\omega(mk) t) = ab(nk) \exp(i\omega(nk) t),$$

где

$$ab(nk) = a(nm) b(mk).$$

Это приводит нас к тому, чтобы рассматривать произведение амплитуд (nm) - и (mk) -компонент как (nk) -амплитуду. Вместе с тем правилом, что в A -уравнениях можно складывать только амплитуды, относящиеся к одной и той же паре наборов чисел, это заменяет то классическое

правило, что все входящие в A -уравнение амплитуды относятся к одному и тому же набору n .

Теперь мы в состоянии выполнять обычные алгебраические операции над квантовыми переменными. Сумма x и y определяется уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \{x + y\}(nm) &= x(nm) + y(nm), \\ \text{а произведение — соотношением} \\ xy(nm) &= \sum_k x(nk) y(km) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

аналогично классическому произведению

$$(xy)_{\alpha n} = \sum_r x_{r n} y_{\alpha - r, n}.$$

Здесь появляется важное различие между двумя алгебрами. Вообще говоря,

$$xy(nm) \neq yx(nm),$$

и квантовое умножение не коммутативно, хотя, как легко проверить, ассоциативно и дистрибутивно. Величину с компонентами $xy(nm)$, определенными (2), мы будем называть гейзенберговым произведением x и y и записывать просто как xy . Всякий раз, когда будут появляться умножаемые друг на друга квантовые величины, будет пониматься гейзенбергово произведение. Конечно, для произведений амплитуд или частот, или других величин, связанных с явно указанными наборами n , будет иметься в виду обычное умножение.

Величина, обратная к квантовому количеству x , может быть определена любым из соотношений

$$1/x \cdot x = 1 \quad \text{или} \quad x \cdot 1/x = 1. \quad (3)$$

Эти два уравнения эквивалентны, ибо если умножить обе стороны первого на x слева и поделить на x справа, то получится второе. Аналогично, квадратный корень из x можно определить требованием

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x. \quad (4)$$

Не очевидно, что у (3) и (4) всегда должны быть решения. В частности, может оказаться, что для того, чтобы выразить \sqrt{x} , будет необходимо ввести субгармоники, т. е. новые промежуточные уровни частот. Эти трудности можно обойти, освобождая каждое уравнение от иррациональностей и знаменателей до его интерпретации в квантовой теории и получения из него A -уравнений.

Уравнение (7) завершает уравнения (6), определяя $a(kk')$ для $k = k'$. Уравнение (5) сводится теперь к

$$\begin{aligned} dx/dv(nm) &= \sum_{m' \neq m} a(nm; nm') x(nm') + \\ &+ \sum_{n' \neq n} a(nm; n'm) x(n'm) + a(nm; nm) x(nm) = \\ &= \sum_{m' \neq m} a(n'm) x(nm') - \sum_{n' \neq n} a(nn') x(n'm) + \\ &+ \{a(mm) - a(nn)\} x(nm) = \sum_k \{x(nk)a(km) - a(nk)x(km)\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$dx/dv = xa - ax. \quad (8)$$

Итак, наиболее общая операция, удовлетворяющая законам (I) и (II), которую можно произвести над квантовой переменной, это взятие разности ее гейзенберговских произведений на некоторую другую квантовую переменную. Легко видеть, что, вообще говоря, переставлять порядок дифференцирований нельзя, т. е.

$$\frac{d^2x}{du dv} \neq \frac{d^2x}{dv du}.$$

В качестве примера квантового дифференцирования, мы можем рассмотреть случай, когда a постоянно, так что $a(nm) = 0$, кроме как для $n = m$. Имеем

$$dx/dv(nm) = x(nm)a(mm) - a(nn)x(nm).$$

В частности, если $ia(mm)$ равны $\Omega(m)$ — введенным ранее уровням частот, то

$$dx/dv(nm) = i\omega(nm)x(nm),$$

и наше дифференцирование по v становится обычным дифференцированием по t .

§ 4. Квантовые условия

Посмотрим теперь, чему соответствует выражение $(xy - yx)$ в классической теории. Для этого предположим, что $x(n, n - \alpha)$ меняется с изменением n лишь медленно, причем n — большие числа, а α — малые, так что можно положить

$$x(n, n - \alpha) = x_{\alpha n},$$

где $\kappa_r = n_r h$ или $(n_r + \alpha_r) h$, что практически эквивалентно. Тогда

$$\begin{aligned} x(n, n-\alpha) y(n-\alpha, n-\alpha-\beta) - y(n, n-\beta) x(n-\beta, n-\alpha-\beta) = \\ = \{x(n, n-\alpha) - x(n-\beta, n-\beta-\alpha)\} y(n-\alpha, n-\alpha-\beta) - \\ - \{y(n, n-\beta) - y(n-\alpha, n-\alpha-\beta)\} x(n-\beta, n-\alpha-\beta) = \\ = h \sum_r \left\{ \beta_r \frac{\partial x_{\alpha\kappa}}{\partial \kappa_r} y_{\beta\kappa} - \alpha_r \frac{\partial y_{\beta\kappa}}{\partial \kappa_r} x_{\alpha\kappa} \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

Далее,

$$2\pi i \beta_r y_\beta \exp i(\beta\omega)t = \frac{\partial}{\partial \omega_r} \{y_\beta \exp i(\beta\omega)t\},$$

где ω_r — угловые переменные, равные $\omega_r t / 2\pi$. Следовательно, компоненте (nm) разности $(xy - yx)$ соответствует в классической теории

$$\begin{aligned} \frac{i\hbar}{2\pi} \sum_{\alpha+\beta=n-m} \sum_r \left\{ \frac{\partial}{\partial \kappa_r} \{x_\alpha \exp i(\alpha\omega)t\} \frac{\partial}{\partial \omega_r} \{y_\beta \exp i(\beta\omega)t\} - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial \kappa_r} \{y_\beta \exp i(\beta\omega)t\} \frac{\partial}{\partial \omega_r} \{x_\alpha \exp i(\alpha\omega)t\} \right\}, \end{aligned}$$

или самой разности $(xy - yx)$ соответствует

$$\frac{i\hbar}{2\pi} \sum_r \left\{ \frac{\partial x}{\partial \kappa_r} \frac{\partial y}{\partial \omega_r} - \frac{\partial y}{\partial \kappa_r} \frac{\partial x}{\partial \omega_r} \right\}.$$

Если положить κ_r равными переменным действия J_r , то это выражение становится умноженной на $i\hbar/2\pi$ скобкой Пуассона (или Якоби):

$$[x, y] = \sum_r \left\{ \frac{\partial x}{\partial \omega_r} \frac{\partial y}{\partial J_r} - \frac{\partial y}{\partial \omega_r} \frac{\partial x}{\partial J_r} \right\} = \sum_r \left\{ \frac{\partial x}{\partial q_r} \frac{\partial y}{\partial p_r} - \frac{\partial y}{\partial q_r} \frac{\partial x}{\partial p_r} \right\},$$

где p и q — произвольный набор канонических переменных системы.

Элементарные скобки Пуассона различных комбинаций p и q суть:

$$\left. \begin{aligned} [q_r, q_s] &= 0, & [p_r, p_s] &= 0, \\ & = 0 & (r \neq s), \\ [q_r, p_s] &= \delta_{rs} & & \\ & = 1 & (r = s). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Общие скобки Пуассона удовлетворяют законам (I) и (II), которые теперь гласят:

$$[x, z] + [y, z] = [x + y, z], \quad (\text{IA})$$

$$[xy, z] = [x, z]y + x[y, z]. \quad (\text{IIA})$$

С помощью этих законов вместе с $[x, y] = -[y, x]$ можно (если x и y являются заданными алгебраическими функциями p_r и q_r) выразить скобочное выражение $[x, y]$ через $[q_r, q_s]$, $[p_r, p_s]$ и $[q_r, p_s]$ и тем самым вычислить его, не используя коммутативного закона умножения (кроме его неявного использования при доказательстве (IIA), где оно необходимо). Таким образом, скобочное выражение $[x, y]$ имеет смысл и в квантовой теории, когда x и y являются квантовыми переменными, если принять, что элементарные скобки по-прежнему задаются выражениями (10).

Мы делаем фундаментальное предположение, что *разность гейзенберговских произведений двух квантовых величин равна умноженной на $i\hbar/2\pi$ их скобке Пуассона*. В символах:

$$xy - yx = i\hbar/2\pi \cdot [x, y]. \quad (11)$$

Мы видели, что в предельном случае классической теории это эквивалентно выбору в качестве произвольных величин x_r , нумерующих решения, переменных действия J_r , и представляется разумным принять, что (11) образует общие квантовые условия.

Не самоочевидно, что вся поставляемая уравнением (11) информация совместна. Благодаря тому, что величины в обеих частях (11) удовлетворяют одинаковым законам (I) и (II) или (IA) и (IIA), единственными независимыми условиями, накладываемыми (11), являются те, в которых x и y суть p и q , а именно:

$$\left. \begin{aligned} q_r q_s - q_s q_r &= 0, \\ p_r p_s - p_s p_r &= 0, \\ q_r p_s - p_s q_r &= \delta_{rs} i\hbar/2\pi. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Если бы единственным аргументом в пользу того, что уравнения (12) совместны друг с другом и с уравнениями движения, была их известная совместность в пределе $\hbar \rightarrow 0$, то дело не было бы бесспорным, так как могло бы случиться, что они ведут к несовместности типа $\hbar = 0$, которая не есть несовместность в пределе. Существует, однако, гораздо более сильное доказательство, чем это, обязанное тому обстоятельству, что классические операции подчиняются тем же самым законам, что и квантовые, так что если можно получить несовместность, применяя квантовые операции, то, применяя классические операции на том же самом пути, мы также должны будем прийти к несовместности. Если последовательность классических

операций приводит к равенству $0 = 0$, то соответствующая последовательность квантовых операций должна также привести к равенству $0 = 0$, а не $\hbar = 0$, так как нет способа получить величину, которая не обращается в нуль при совершении квантовых операций над квантовыми переменными, такую, что соответствующие классические операции над классическими переменными давали бы величину, обращающуюся в нуль. Таким образом, упомянутая выше возможность вывести с помощью квантовых операций несовместность типа $\hbar = 0$ не может случиться. *Соответствие между квантовой и классической теориями состоит не столько в предельном согласии при $\hbar \rightarrow 0$, сколько в том, что математические операции двух теорий подчиняются во многих случаях тем же законам.*

Для системы с одной степенью свободы, если положить $p = m\dot{q}$, единственным квантовым условием будет

$$2\pi m (q\dot{q} - \dot{q}q) = i\hbar.$$

Приравнивая постоянную часть левой стороны $i\hbar$, получим

$$4\pi m \sum_k q(nk) q(kn) \omega(kn) = \hbar,$$

что эквивалентно квантовому условию Гейзенберга ¹⁾. Приравнивая оставшиеся компоненты левой части нулю, получим дальнейшие соотношения, не содержащиеся в теории Гейзенберга.

Квантовые условия (12) во многих случаях позволяют преодолеть трудность с выбором порядка сомножителей в уравнениях движения. Этот порядок несущественен, кроме тех случаев, когда перемножаются p_r и q_r , что никогда не случается для системы, которую можно описать потенциальной энергией, зависящей только от q , и кинетической энергией, зависящей только от p .

Можно отметить, что классическая величина, фигурирующая в теории Крамерса и Гейзенберга ²⁾ рассеяния атомами, имеет компоненты вида (8) (с $\kappa_r = J_r$), которые интерпретируются в квантовой теории способом, находящимся в согласии с теорией, излагаемой здесь. Ни одно классическое выражение, включающее производные, не может быть интерпретировано в квантовой теории, если оно не может быть приведено к такому виду.

¹⁾ Heisenberg // Loc. cit., уравнение (16).

²⁾ Kramers and Heisenberg // Zs. Phys.— 1925.— Bd 31.— S. 681, уравнение (18).

§ 5. Свойства квантовых скобок Пуассона

В этом разделе мы выедем некоторые результаты, не зависящие от предположения о квантовых условиях (11) или (12).

В классической теории скобки Пуассона удовлетворяют тождеству

$$[x, y, z] = [[x, y], z] + [[y, z], x] + [z, x], y = 0. \quad (13)$$

В квантовой теории этот результат самоочевиден, если x , y и z —это p или q . Далее, из (IA) и (IIA) получаем

$$[x_1 + x_2, y, z] = [x_1, y, z] + [x_2, y, z]$$

и

$$[x_1 x_2, y, z] = x_1 [x_2, y, z] + [x_1, y, z] x_2.$$

Значит, результат должен остаться правильным и в квантовой теории, если x , y и z представимы каким-либо образом в виде сумм и произведений p и q , так что он должен остаться правильным и в общем случае. Заметим, что тождество, отвечающее (13), когда скобки Пуассона заменены разностями гейзенберговских произведений ($xy - yx$), самоочевидно, так что никаких противоречий с соотношением (11) не возникает.

Если H —функция Гамильтона системы, то классические уравнения движения могут быть записаны как

$$\dot{p}_r = [p_r, H], \quad \dot{q}_r = [q_r, H].$$

Эти уравнения останутся справедливыми и в квантовой теории для систем, в которых порядок расположения множителей в уравнениях движения несущественен. Их можно принять справедливыми и для систем, в которых этот порядок важен, если можно решить, в каком порядке стоят множители в H . Из законов (IA) и (IIA) следует, что для любого x в квантовой теории

$$\dot{x} = [x, H]. \quad (14)$$

Если A —интеграл уравнений движения квантовой теории, то

$$[A, H] = 0.$$

Переменные действия J_r должны, конечно, удовлетворять этому условию. Если A_1 и A_2 —два таких интеграла, то прямым применением (13) получаем, что

$$[A_1, A_2] = \text{const},$$

как и в классической теории.

В классической теории условия того, что набор переменных P_r, Q_r будет каноническим, имеют вид

$$[Q_r, Q_s] = 0, \quad [P_r, P_s] = 0, \\ [Q_r, P_s] = \delta_{rs}.$$

Эти уравнения могут быть перенесены в квантовую теорию как условия того, чтобы квантовые переменные P_r, Q_s были бы каноническими.

В классической теории можно ввести набор канонических переменных ξ_r, η_r , связанных со стандартными (uniformising) переменными J_r, ω_r соотношениями

$$\xi_r = (2\pi)^{-1/2} J_r^{1/2} \exp 2\pi i \omega_r, \\ \eta_r = -i (2\pi)^{-1/2} J_r^{1/2} \exp (-2\pi i \omega_r).$$

Вероятно, и в квантовой теории должен существовать соответствующий набор канонических переменных, каждая из которых имеет только один тип компонент, так что $\xi_r(nm) = 0$, кроме как для $m_r = n_r - 1$ и $m_s = n_s$ ($s \neq r$), а $\eta_r(nm) = 0$, кроме как для $m_r = n_r + 1$ и $m_s = n_s$ ($s \neq r$). Можно рассматривать существование таких переменных как условие многократной периодичности системы в квантовой теории. Компоненты гейзенберговских произведений ξ_r и η_r удовлетворяют соотношению

$$\xi_r \eta_r (nn) = \xi_r (nm) \eta_r (mn) = \eta_r (mn) \xi_r (nm) = \eta_r \xi_r (mm), \quad (15)$$

где m связаны с n формулами $m_r = n_r - 1, m_s = n_s$ ($s \neq r$).

Классические ξ и η удовлетворяют соотношению $\xi_r \eta_r = -i/2\pi \cdot J_r$. Это соотношение не должно обязательно сохраниться для квантовых ξ и η . Квантовым соотношением может быть, например, $\eta_r \xi_r = -i/2\pi \cdot J_r$ или $1/2 (\xi_r \eta_r + \eta_r \xi_r) = -i/2\pi \cdot J_r$. Чтобы выяснить правильный вид этих соотношений, необходимо подробно исследовать каждую конкретную динамическую систему. В случае правильности последнего соотношения можно ввести набор канонических переменных ξ'_r, η'_r , определяемых равенствами

$$\xi'_r = (\xi_r + i\eta_r)/\sqrt{2}, \quad \eta'_r = (i\xi_r + \eta_r)/\sqrt{2},$$

и получить

$$J_r = \pi (\xi_r'^2 + \eta_r'^2).$$

Такая возможность действительно осуществляется для гармонического осциллятора. В общем же случае J_r не обязана быть даже рациональной функцией ξ_r и η_r , как то показывает рассмотренный Гейзенбергом пример жесткого ротатора.

§ 6. Стационарные состояния

У величины C , которая не меняется со временем, все (nm) -компоненты должны быть нулями, кроме тех, для которых $n = m$. Поэтому становится удобным предположить, что каждый набор чисел n связан с определенным состоянием атома, как в теории Бора, так что каждое $C(nn)$ относится к определенному состоянию точно так же, как всякая величина, встречающаяся в классической теории, относится к определенной конфигурации. Компоненты же меняющейся квантовой величины настолько взаимосвязаны, что невозможно ассоциировать сумму некоторых из них с данным состоянием.

Соотношения между квантовыми величинами сводятся, если все эти величины постоянны, к соотношениям между $C(nn)$, относящимся к определенному стационарному состоянию n . Эти соотношения будут теми же, что и соотношения классической теории в предположении, что классические законы выполняются для описания стационарных состояний; в частности, энергия будет той же функцией переменных действия J , что и в классической теории. Мы приходим здесь к оправданию предположения Бора о природе механики стационарных состояний. Следовало бы, тем не менее, отметить, что связанные со стационарным состоянием в теории Бора изменяющиеся величины, амплитуды и частоты орбитального движения, не имеют физического смысла и никакого математического значения.

Если мы применим фундаментальное уравнение (11) к величинам x и H , то с помощью (14) получим

$$\begin{aligned} x(nm)H(mm) - H(nn)x(nm) &= ih/2\pi \cdot \dot{x}(nm) = \\ &= -h/2\pi \cdot \omega(nm)x(nm), \end{aligned}$$

или

$$H(nn) - H(mm) = h/2\pi \cdot \omega(nm).$$

Это — в точности соотношение Бора, связывающее частоты с разностями энергий.

Квантовое условие (11), примененное к введенным выше каноническим переменным ξ_r, η_r , дает

$$\xi_r \eta_r (nn) - \eta_r \xi_r (nn) = ih/2\pi \cdot [\xi_r, \eta_r] = ih/2\pi.$$

В комбинации с (15) это уравнение показывает, что

$$\xi_r \eta_r (nn) = -n_r ih/2\pi + \text{const.}$$

Физически известно, что у атома есть нормальное состояние, в котором он не излучает. Это обстоятельство учитывается

в теории предположением Гейзенберга, что все амплитуды $C(nm)$, имеющие отрицательные n_r или m_r , обращаются в нуль, или, скорее, не существуют, если принять, что в нормальном состоянии каждое n_r равно нулю. Отсюда при учете уравнения (15) получается, что $\xi_r \eta_r(nn) = 0$, если $n_r = 0$. Значит, в общем случае

$$\xi_r \eta_r(nn) = -n_r i \hbar / 2\pi.$$

Если $\xi_r \eta_r = -i/2\pi \cdot J_r$, то $J_r = n_r \hbar$. Это в точности обычное правило квантования стационарных состояний, так что в этом случае частоты системы совпадают с даваемыми теорией Бора. Если $1/2(\xi_r \eta_r + \eta_r \xi_r) = -i/2\pi \cdot J_r$, то $J_r = (n_r + 1/2)\hbar$. Следовательно, в этом случае, чтобы получить правильные частоты по теории Бора, надо, вообще говоря, использовать полужелые квантовые числа¹⁾.

До сих пор мы рассматривали только многократно-периодические системы. Не видно, однако, никаких причин, почему фундаментальные уравнения (11) и (12) нельзя было бы в равной степени применять и к непериодическим системам, в которых ни одна из образующих частиц не уходит на бесконечность, таким, как атом в общем случае. Для такой системы нельзя было бы ожидать, что стационарные состояния удастся классифицировать (за исключением, возможно, случаев четко выделенных периодических движений), так что надо было бы приписывать каждому стационарному состоянию единственное число n по совершенно произвольному плану. Наши квантовые переменные по-прежнему имели бы гармонические компоненты, связанные с двумя n каждая, и гейзенбергово умножение могло бы выполняться в точности так же, как выше. Таким образом, в интерпретации уравнений (12) или уравнений движения не возникло бы никакой неоднозначности.

Я хотел бы выразить мою благодарность Р. Г. Фаулера, F.R.S., за многие ценные советы во время написания этой статьи.

¹⁾ В частном случае планкова осциллятора частота получилась бы правильной в любом случае, поскольку энергия линейно зависит от J .

2. К ТЕОРИИ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ ¹⁾

Proceedings of the Royal Society
A vol. 112 (1926), pp. 661—677

ON THE THEORY OF QUANTUM MECHANICS

By P.A.M. DIRAC, St. John's College, Cambridge

(Communicated by R. H. Fowler, F.R.S.— Received August 26, 1926)

§ 1. Введение и аннотация

Новая механика атомов, введенная Гейзенбергом ²⁾, может быть основана на предположении, что переменные, описывающие динамическую систему, не удовлетворяют коммутативному закону умножения, но подчинены вместо этого некоторым квантовым условиям. Можно построить теорию, не зная о динамических переменных ничего, кроме алгебраических законов, которым они подчиняются, и показать, что они представляются матрицами, если существует набор униформизирующих переменных для динамической системы ³⁾. Однако можно показать (см. § 3), что для системы, содержащей более чем один электрон, не существует набора униформизирующих переменных, так что теория не сможет далеко продвинуться в этом направлении.

Новое развитие этой теории было недавно предложено Шредингером ⁴⁾. Начав с идеи о том, что атомная система не может представляться траекторией, т. е. точкой, движущейся в пространстве координат, но должна описываться волной в этом пространстве, Шредингер получает из вариационного принципа дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять волновая функция ψ . Это дифференциальное уравнение оказывается очень близко связанным с гамильтоновым уравнением, описывающим систему.

¹⁾ Перевод с английского М. К. Поливанова.

²⁾ См. различные статьи Борна, Гейзенберга и Иордана в «Zs Phys.» начиная с 33-го тома.

³⁾ Proc. Roy. Soc. A.— 1926.— V. 110.— P. 561.

⁴⁾ См. различные статьи в «Ann. d. Phys.» начиная с 79-го тома (1926 г., С. 361).

Именно, если

$$H(q_r, p_r) - W = 0$$

— гамильтоново уравнение системы, причем q_r и p_r — канонические переменные, то волновое уравнение для ψ есть

$$\left\{ H\left(q_r, ih \frac{\partial}{\partial q_r}\right) - W \right\} \psi = 0, \quad (1)$$

где h — обычная константа Планка, домноженная на $(2\pi)^{-1}$. Каждый импульс p_r в H заменяется на оператор $ih \partial/\partial q_r$, который действует на все, что стоит вправо от него в том члене, в котором он появляется. Шредингер рассматривает значения параметра W , для которых существует такая функция ψ , удовлетворяющая (1), которая непрерывна, однозначна и ограничена во всем пространстве q , как энергетические уровни системы и показывает, что если известно общее решение (1), то легко найти матрицы, представляющие p_r и q_r , удовлетворяющие всем условиям, которым они должны удовлетворять согласно матричной механике Гейзенберга и совместимые с ранее найденными уравнениями энергии. Таким образом устанавливается математическая эквивалентность обеих теорий.

В настоящей статье теория Шредингера рассматривается в § 2 с несколько более общей точки зрения, когда время t и соответствующий сопряженный импульс — W рассматриваются с самого начала на тех же основаниях, что и другие переменные. Тем самым устанавливается математическая эквивалентность этих теорий.

В § 3 рассмотрена задача о системе, содержащей несколько одинаковых частиц — таких, как, скажем, атом с несколькими электронами. Если поменять местами два электрона, то новое состояние атома физически не отличается от исходного. В этом случае следует ожидать, что только симметричные функции координат всех электронов могут быть представлены матрицами. Выяснено, что это позволяет получить два решения задачи, удовлетворяющих всем необходимым условиям, и в теории нет возможности для выбора, которое же из них — правильное. Одно из решений приводит к принципу Паули — не более одного электрона может находиться на любой данной орбите, а другое (если его применить к аналогичной задаче об идеальном газе) приводит к статистической механике Эйнштейна — Бозе.

В § 5 рассмотрено при помощи нового предположения воздействие произвольно меняющегося возмущения на атом-

ную систему. Эта теория применяется к поглощению и стимулированному испусканию излучения атомом. Получено обобщение описания этого явления при помощи коэффициентов В Эйнштейна, в котором фазы играют свою роль. Для спонтанного излучения этот метод не применим.

§ 2. Общая теория

Согласно новой точке зрения, введенной Шредингером мы больше не оставляем неопределенной природу динамических переменных, которые описывают атомную систему, но рассматриваем все q и t как обычные математические переменные (что позволительно, поскольку они коммутируют между собой), а p и W выбираем в виде дифференциальных операторов:

$$p_r = -ih \frac{\partial}{\partial q_r}, \quad -W = -ih \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2)$$

Всякий раз, когда p_r или W появляется в одном из членов уравнения, их следует понимать в смысле соответствующих дифференциальных операторов, действующих на все, что стоит справа от них в этом члене уравнения. Таким образом, выполняя эти операции, мы сводим любую функцию от p , q , W и t к функции только от q и t .

Соотношения (2) требуют, чтобы в алгебре, управляющей динамическими переменными, были сделаны две очевидные модификации. Во-первых, только целые рациональные функции p и W осмысленны и, во-вторых, уравнения можно умножать на какой-либо множитель (целый по p и W) слева, но, вообще говоря, нельзя умножать справа¹⁾. Иными словами, если дано уравнение $a=b$, то отсюда можно заключить, что $Xa=Xb$, где X произвольно, но, вообще говоря, нельзя заключить, что $aX=bX$.

Однако существуют некоторые уравнения $a=b$, для которых верно $aX=bX$ при любом X , и такие уравнения мы называем тождествами. Квантовые условия

$$q_r p_s - p_s q_r = ih \delta_{rs}, \quad p_r p_s - p_s p_r = 0$$

и аналогичные соотношения, включающие $-W$ и t , суть тождества, поскольку легко убедиться (это было проделано

¹⁾ Весьма примечательно, что в этом замечании уже заложен, по существу, корень развитой позже Дираком гамильтоновой механики со связями (см. ниже статьи 18—20).—Примеч. ред.

Шредингером), что соотношения

$$(q_r p_s - p_s q_r) X = i\hbar \delta_{rs} X$$

и т. п. удовлетворяются при любом X . Эти соотношения представляют собой главное подтверждение предположения (2).

Если $a = b$ есть тождество, можно установить, поскольку $aX = bX$ и $Xa = Xb$, что

$$aX - Xa = bX - Xb, \text{ или } [a, X] = [b, X].$$

Следовательно, можно приравнять скобку Пуассона с обеих сторон тождества любой величине, и, таким образом, наши квантовые тождества суть аналог тождеств в классической теории. Мы примем, что общее уравнение $xy - yx = i\hbar [x, y]$ и уравнение движения динамической системы суть тождества.

Динамическая система описывается наложенным на переменные гамильтоновым уравнением

$$H(q_r, p_r, t) - W = 0, \quad (3)$$

или, в более общей форме,

$$F(q_r, p_r, t, W) = 0, \quad (4)$$

и уравнения движения суть

$$\frac{dx}{ds} = [x, F],$$

где x — любая функция динамических переменных, а s — переменная, зависящая от формы, в которой записано (4), и, в частности, если (4) записано в форме (3), то s — это просто t .

В новой теории мы рассмотрим уравнение

$$F\psi = 0, \quad (5)$$

которое, если мы считаем ψ функцией лишь от q и t , есть обычное дифференциальное уравнение для ψ . Из общего решения этого дифференциального уравнения легко получить матрицы, являющиеся решением исходной механической задачи.

Поскольку уравнение (5) линейно по ψ , то его общее решение имеет вид

$$\psi = \sum c_n \psi_n, \quad (6)$$

где c_n — произвольные постоянные, а ψ_n — множество независимых решений, которые можно назвать собственными

функциями. Только такие решения, которые непрерывны, однозначны и ограничены во всей области изменения q и t , годятся в этой теории. Вместо дискретного набора собственных функций ψ может возникать также и непрерывный набор $\psi(\alpha)$, зависящих от параметра α и удовлетворяющих дифференциальному уравнению при всех значениях α в некотором интервале, и в этом случае сумма в (6) заменяется интегралом $\int c_\alpha \psi(\alpha) d\alpha$ ¹⁾; дискретный и непрерывный наборы могут появляться и вместе. Однако для определенности в этой работе мы будем явно выписывать только дискретную сумму.

Теперь покажем, что любая постоянная интегрирования динамической системы (либо первый интеграл, либо второй интеграл) может быть представлена матрицей, элементы которой постоянны, причем каждой собственной функции ψ_n отвечает один столбец и одна строка матрицы. Пусть a —постоянная интегрирования системы, т. е. такая функция динамических переменных, что $[a, F] = 0$ тождественно. Мы имеем соотношение

$$Fa = aF,$$

причем, поскольку это тождество, его можно умножить на ψ_n справа. Тогда получаем

$$F\alpha\psi_n = aF\psi_n = 0,$$

так как $F\psi_n = 0$ (хотя и не тождественно). Следовательно, но, $\alpha\psi_n$ есть решение дифференциального уравнения (5)—так что его можно представить в виде разложения (6), т. е.

$$a\psi_n = \sum_m \psi_m a_{mn},$$

где a_{mn} —постоянные. Выберем величины a_{mn} в качестве элементов матрицы, которая представляет a . Матричное правило умножения, очевидно, выполняется, так как если b —другая постоянная интегрирования, то

$$ab\psi_m = a \sum_n \psi_n b_{mn} = \sum_{m, k} \psi_k a_{km} b_{mn},$$

¹⁾ Общее решение может содержать такие величины, как ψ_α и $d\psi_\alpha/d\alpha$, удовлетворяющие дифференциальному уравнению (5), но не имеющие, строго говоря, вида $\int c_\alpha \psi_\alpha d\alpha$, хотя их можно понимать как пределы последовательностей, члены которых имеют такой вид.

но также

$$ab\psi_n = \sum_k \psi_k (ab)_{kn}$$

и, таким образом,

$$(ab)_{kn} = \sum_m a_{km} b_{mn}.$$

Как пример постоянной интегрирования динамической системы можно выбрать значение $x(t_0)$, которое произвольная функция x переменных p, q, W и t принимает в указанное время $t = t_0$. Матрица, представляющая $x(t_0)$, состоит из элементов, каждый из которых есть функция от t_0 . Написавши t вместо t_0 , мы видим, что произвольная функция динамических переменных $x(t)$, или просто x , может быть представлена матрицей, элементы которой зависят лишь от t .

Матричное представление, полученное нами, не единственно, так как можно выбирать любой набор независимых собственных функций ψ_n . Чтобы получить матрицы исходной квантовой механики Гейзенберга, следует выбрать ψ_n специальным образом. Мы всегда можем с помощью линейного преобразования получить набор ψ_n , которые превращают матрицу, представляющую любую данную постоянную интегрирования динамической системы, в диагональную. Допустим теперь, что гамильтониан F не содержит времени явно, так что W есть постоянная системы и является энергией, и выберем теперь ψ_n так, чтобы матрица, представляющая W , была диагональной, т. е. так, чтобы сделать

$$W\psi_n = W_n\psi_n, \quad (7)$$

где W_n — числовые постоянные. Пусть x — любая функция динамических переменных, не содержащая явно времени, и положим

$$x\psi_n = \sum_m x_{mn}\psi_m,$$

где x_{mn} — функции только времени. Покажем теперь, что x_{mn} имеют вид

$$x_{mn} = a_{mn} e^{i(W_m - W_n)t/\hbar}, \quad (8)$$

здесь a_{mn} — постоянные, как в теории Гейзенберга. Имеем

$$\begin{aligned} Wx\psi_n &= \sum_m Wx_{mn}\psi_m = \sum_m (Wx_{mn} - x_{mn}W)\psi_m + \sum_m x_{mn}W\psi_m = \\ &= \sum_m i\hbar \dot{x}_{mn}\psi_m + \sum_m x_{mn}W\psi_m. \end{aligned} \quad (9)$$

А так как x не содержит времени явно, то

$$Wx\psi_n = xW\psi_n = xW_n\psi_n = W_nx\psi_n = W_n \sum_m x_{mn}\psi_m. \quad (10)$$

Приравнивая коэффициенты при ψ_m в (9) и (10), получаем равенство

$$ih\dot{x}_{mn} = x_{mn}(W_n - W_m),$$

которое и доказывает, что x_{mn} имеет вид (8).

Итак, мы показали, что с таким выбором ψ_n наши матрицы удовлетворяют всем условиям матричной механики Гейзенберга, кроме того условия, что матрицы, представляющие вещественные величины, должны быть эрмитовы (т. е. их mn -й и nm -й элементы — комплексно сопряжены). Кажется, не может существовать простого общего доказательства этого, поскольку оно должно было бы опираться на ограниченность ψ_n . Несложно доказать частный случай, именно, что матрица, представляющая W , эрмитова, т. е. что W_n вещественны. Действительно, вследствие (7) ψ_n должна иметь вид

$$\psi_n = u_n e^{-iW_n t/h},$$

где u_n не зависит от t , и если W_n содержит мнимую часть, то ψ_n не будет оставаться ограниченной при t , стремящемся к бесконечности. В общем случае матрицы, представляющие вещественные величины, могут быть эрмитовыми, только если произвольные числовые постоянные, на которые можно домножить ψ_n , выбраны специальным образом.

Мы можем считать, что каждая собственная функция ψ_n связана с определенными числовыми значениями некоторых из постоянных интегрирования системы. Поэтому если мы найдем постоянные интегрирования a, b, \dots такие, что

$$a\psi_n = a_n\psi_n, \quad b\psi_n = b_n\psi_n, \dots \quad (11)$$

где a_n, b_n — числовые постоянные, то можно сказать, что ψ_n представляет состояние системы, в котором a, b, \dots имеют числовые значения a_n, b_n, \dots (Заметим, что a, b, \dots должны коммутировать, чтобы (11) могло выполняться.) Таким путем мы можем найти собственные функции, представляющие стационарные состояния атомной системы с определенными значениями энергии, момента и других постоянных интегрирования.

Следует отметить, что выбор времени t в качестве переменной, которая появляется в элементах матриц, пред-

ставляющих изменяющиеся величины, совершенно произволен, и подошла бы любая функция t и q , которая непрерывно возрастает. Чтобы аккуратно определить излучение, испускаемое системой в направлении оси x , пришлось бы¹⁾ воспользоваться $(t-x/c)$ вместо t . Весьма вероятно, что представление постоянной интегрирования системы матрицей с постоянными элементами более фундаментально, чем представление меняющейся величины матрицей, элементы которой зависят от некоторой переменной, такой как t или $(t-x/c)$. Кажется возможным построить электромагнитную теорию, в которой потенциалы поля в указанной точке x_0, y_0, z_0, t_0 в пространстве-времени будут представимы матрицами с постоянными элементами, которые являются функциями x_0, y_0, z_0, t_0 .

§ 3. Системы, содержащие несколько одинаковых частиц

В матричной механике Гейзенберга принимается, что элементы матриц, которые представляют динамические переменные, определяют частоты и интенсивности компонент испущенного излучения. Таким образом, эта теория позволяет вычислить как раз те величины, которые важны для физики, и не дает никаких сведений о таких величинах, как орбитальные частоты, которые нет никакой надежды определить экспериментально. Мы ожидаем, что такая весьма удовлетворительная черта сохранится и во всем будущем развитии теории.

Рассмотрим теперь систему, содержащую две или более одинаковых частиц, скажем, для определенности — атом с двумя электронами. Обозначим (mn) то состояние атома, в котором один электрон находится на орбите, обозначаемой m , а другой — на орбите n . Возникает вопрос, должны ли два состояния (mn) и (nm) , которые физически не различаются (поскольку они разнятся только перестановкой двух электронов), считаться как два разных состояния или же как только одно состояние. Иными словами, должны ли они порождать две строки и два столбца матрицы или только по одному? Если правильна первая альтернатива, то теория должна была бы позволить сосчитать интенсивности, отвечающие двум переходам $(mn) \rightarrow (m'n')$ и $(mn) \rightarrow (n'm')$, по отдельности, так как амплитуда, отвечающая каждому переходу, задава-

¹⁾ Proc. Roy. Soc. A.— 1926.— V. 111.— P. 405.

лась бы определенным элементом в матрице, представляющей полную поляризацию. Однако эти два перехода физически неразличимы, и только сумма интенсивностей обоих переходов может быть определена экспериментально. Поэтому для того, чтобы сохранить ту важнейшую черту нашей теории, что она должна позволять вычислять только наблюдаемые величины, мы должны принять вторую альтернативу и считать (mn) и (nm) одним состоянием.

Однако и эта альтернатива приводит к трудностям. Симметрия между двумя электронами требует, чтобы амплитуда, отвечающая переходу $(mn) \rightarrow (m'n')$ координаты x_1 одного из электронов, была равна амплитуде, отвечающей переходу $(nm) \rightarrow (n'm')$ соответствующей координаты x_2 другого электрона, т. е. чтобы

$$x_1(mn; m'n') = x_2(nm; n'm'). \quad (12)$$

Если теперь мы считаем, что (mn) и (nm) оба определяют одну и ту же строку и столбец матриц и аналогично — для $(m'n')$ и $(n'm')$, то уравнение (12) показывает, что каждый элемент матрицы x_1 равен соответствующему элементу матрицы x_2 , так что мы должны иметь матричное уравнение

$$x_1 = x_2.$$

Это соотношение, однако, явно невозможно, так как, кроме прочего, оно несовместимо с квантовыми условиями. Мы должны заключить, что не симметричные функции координат (и импульсов) двух электронов не могут быть представлены матрицами. Симметричные функции, такие как полная поляризация атома, могут быть представлены матрицами без противоречия, и одних этих матриц достаточно для определения всех физических свойств системы.

Одно из последствий этих рассуждений состоит в том, что теория униформизирующих переменных, введенная автором, больше не применима. Это происходит из-за того, что в противном случае каждому переходу $(mn) \rightarrow (m'n')$ соответствовал бы член $e^{i\alpha W}$ в разложении Фурье, и мы должны были бы потребовать, чтобы было единственное состояние, скажем $(m''n'')$, такое, чтобы тот же член $e^{i\alpha W}$ отвечал переходу $(m'n') \rightarrow (m''n'')$ и член $e^{2i\alpha W}$ отвечал переходу $(mn) \rightarrow (m''n'')$. Если m и n — квантовые числа и мы для определенности рассматриваем случай одного квантового числа у электрона, то мы должны иметь

$$m'' - m' = m' - m, \quad n'' - n' = n' - n.$$

Но так как состояние $(m'n')$ с тем же успехом можно обозначить и $(n'm')$, то мы могли бы с тем же успехом положить

$$m'' - n' = n' - m, \quad n'' - m' = m' - n,$$

что привело бы к другому состоянию $(m''n'')$. Таким образом, не существует единственного состояния $(m''n'')$, как этого требует теория униформизирующих переменных.

Если пренебречь взаимодействием между двумя электронами, то можно получить собственные функции всего атома, просто умножая собственные функции одного электрона, когда он — единственный электрон в атоме, на собственные функции такого же другого, и принимая для них одно и то же значение времени¹⁾. Так что если $\psi_n(x, y, z, t)$ — собственная функция единственного электрона на орбите n , то собственной функцией всего атома в состоянии (mn) будет, скажем,

$$\psi_m(x_1, y_1, z_1, t) \psi_n(x_2, y_2, z_2, t) = \psi_m(1) \psi_n(2),$$

где x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 — координаты двух электронов, а $\psi(r)$ означает $\psi(x_r, y_r, z_r, t)$. Собственная функция $\psi_m(2) \psi_n(1)$, однако, отвечает тому же состоянию атома, если мы считаем состояния (mn) и (nm) совпадающими. Но две независимые собственные функции должны представляться двумя столбцами и строками в матрицах. Если мы хотим иметь в матрицах только один столбец и одну строку, отвечающие обоим состояниям (mn) и (nm) , то нам нужно найти набор собственных функций вида

$$\psi_{mn} = a_{mn} \psi_m(1) \psi_n(2) + b_{mn} \psi_m(2) \psi_n(1),$$

где a_{mn} и b_{mn} — постоянные. Этот набор должен содержать лишь одну ψ_{mn} , отвечающую обоим состояниям (mn) и (nm) , и должен быть достаточен, чтобы позволить получить матрицу, представляющую любую симметричную функцию A двух электронов. Это значит, что набор ψ_{mn} следует выбрать так, чтобы A , умноженную на любую выбранную ψ_{mn} , можно было разложить по выбранным ψ_{mn} в виде

$$A \psi_{mn} = \sum_{m'n'} \psi_{m'n'} A_{m'n', mn}, \quad (13)$$

где $A_{mn, m'n'}$ — постоянные или функции лишь времени.

¹⁾ Одна и та же переменная времени t должна входить в обе собственные функции, поскольку гамильтоново уравнение для всей системы мы пишем в виде $H(1) + H(2) - W = 0$, где $H(1)$ и $H(2)$ — гамильтонианы двух отдельных электронов, так что именно общее время t сопряжено к минус полной энергии W .

Есть два способа выбора набора ψ_{mn} , удовлетворяющих этим условиям. Мы можем или положить $a_{mn} = b_{mn}$, и тогда каждая ψ_{mn} будет симметричной функцией двух электронов, так что левая часть (13) симметрична, и только симметричные собственные функции потребуются в ее разложении, или положить $a_{mn} = -b_{mn}$, и тогда все ψ_{mn} будут антисимметричны, и только антисимметричные собственные функции потребуются в разложении. Значит, одни только симметричные собственные функции или одни только антисимметричные собственные функции дают полное решение задачи. Теория в настоящее время неспособна решить, какое из двух решений правильно. Можно получить решение задачи, пользуясь не полным числом возможных собственных функций, но за это придется заплатить тем, что мы сможем представить матрицами только симметричные функции двух электронов.

Эти результаты можно очевидно перенести на любое число электронов. Для r невзаимодействующих электронов с координатами $x_1, y_1, z_1, \dots, x_r, y_r, z_r$ симметричные функции суть

$$\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_r} \psi_{n_1}(\alpha_1) \psi_{n_2}(\alpha_2) \dots \psi_{n_r}(\alpha_r), \quad (14)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ — любые перестановки целых чисел $1, 2, \dots, r$, а антисимметричные функции могут быть записаны в виде детерминанта:

$$\begin{vmatrix} \psi_{n_1}(1) & \psi_{n_1}(2) & \dots & \psi_{n_1}(r) \\ \psi_{n_2}(1) & \psi_{n_2}(2) & \dots & \psi_{n_2}(r) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{n_r}(1) & \psi_{n_r}(2) & \dots & \psi_{n_r}(r) \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Если между электронами есть взаимодействие, то собственные функции по-прежнему останутся симметричными и антисимметричными, хотя их уже нельзя будет записывать в такой простой форме. Во всяком случае, одни только симметричные или одни только антисимметричные собственные функции будут давать полное решение задачи.

Антисимметричная собственная функция тождественно исчезает, когда два из электронов находятся на одной и той же орбите. Это означает, что среди решений задачи с антисимметричными собственными функциями не может быть стационарных состояний с двумя или более электронами на одной орбите, что есть в точности принцип исключения Паули¹⁾. Напротив, решения с симмет-

¹⁾ Pauli // Zs. Phys.— 1925.— Bd 31.— S. 765.

ричными собственными функциями допускают наличие любого числа электронов на одной и той же орбите, так что это решение не может быть правильным решением задачи об электронах в атоме¹⁾.

§ 4. Теория идеального газа

Результаты предыдущего раздела применимы к любой системе, содержащей несколько одинаковых частиц, в частности, к ансамблю молекул газа. Задача будет иметь два решения, в одном из которых собственные функции будут симметричными функциями координат всех молекул, а в другом — антисимметричными.

Волновое уравнение для одной молекулы с массой покоя m , движущейся в свободном пространстве, можно записать как

$$\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{W^2}{c^2} + m^2 c^2 \right) \psi = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0,$$

и его решение имеет вид

$$\psi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = \exp(i(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z - Et)/\hbar), \quad (16)$$

где α_1 , α_2 , α_3 и E — постоянные, удовлетворяющие соотношению

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - E^2/c^2 + m^2 c^2 = 0.$$

Собственные функции (16) представляют атом с компонентами импульса α_1 , α_2 , α_3 и энергией E .

Теперь мы должны получить некоторые ограничения на возможные собственные функции из-за наличия ограничивающих стенок. Обычно предполагается, что собственные функции или волновые функции, ассоциированные с молекулой, обращаются в нуль на границе, но мы считываем, что это условие, если оно верно, может быть выведено из общей теории. Предположим (естественно обобщая методы предыдущего раздела), что запас собственных функций должен быть как раз достаточен для того, чтобы представить в виде матрицы любую функцию координат, имеющую физический смысл. Предположим

¹⁾ Профессор Борн уведомил меня, что Гейзенберг независимо получил результаты, эквивалентные этим (добавлено в корректуру), см. *Heisenberg // Zs. Phys.* — 1926. — Bd 38. — S. 411.

для определенности, что каждая молекула содержится между двумя границами при $x=0$ и $x=2\pi$. Тогда только те функции x , которые определены лишь при $0 < x < 2\pi$, имеют физический смысл и должны быть представимы матрицами. (Это требует меньшего числа собственных функций, чем было бы нужно, чтобы представить в виде матрицы любую функцию от x .) Такие функции $f(x)$ всегда можно разложить в ряд Фурье:

$$f(x) = \sum_n a_n e^{in x}, \quad (17)$$

где a_n — постоянные, а n — целые. Если выбрать из собственных функций (16) те, для которых α_1/h — целое, то функция $f(x)$, умноженная на любую из выбранных собственных функций, может быть разложена в ряд по этим собственным функциям с коэффициентами, зависящими только от t , и, следовательно, $f(x)$ может быть представлена матрицей. Таким образом, выбранных собственных функций достаточно, и, как легко видеть, как раз достаточно для получения матричного представления любой функции от x вида (17). Вместо того чтобы выбирать собственные функции с целыми значениями α_1/h , с тем же успехом можно взять функции с полуцелыми α_1/h или, более общо, с $\alpha_1/h = n + \varepsilon$, где n — целое, а ε — любое вещественное число. Теория не может решить, какой выбор правилен. Однако в задачах статистики любой выбор приводит к одинаковым результатам.

В случае, когда y и z также ограничены неравенствами $0 < y < 2\pi$, $0 < z < 2\pi$, для числа волн, ассоциированных с молекулами, энергия которых лежит между E и $E + dE$, получаем

$$\frac{4\pi}{c^3 h^3} (E^2 - m^2 c^4)^{1/2} E dE.$$

Это число находится в согласии с обычным предположением, что волновая функция исчезает на границах. Если пренебречь релятивистской механикой, то оно сведется к обычному выражению:

$$\frac{2\pi}{h^3} (2m^2)^{3/2} E_1^{1/2} dE_1, \quad (18)$$

где $E_1 = E - mc^2$ — кинетическая энергия. Для произвольного объема газа V это выражение надо умножить на $V/(2\pi)^3$.

Чтобы перейти к собственным функциям ансамбля молекул, между которыми по предположению нет взаимо-

действия, мы перемножаем собственные функции отдельных молекул и выбираем либо симметричные собственные функции вида (14), либо антисимметричные—вида (15). Теперь мы должны сделать новое предположение, что все стационарные состояния ансамбля (каждое представленное одной собственной функцией) имеют одинаковые априорные вероятности. Теперь если мы примем решение задачи, включающее симметричные собственные функции, мы найдем, что все значения числа молекул, ассоциированных с любой волной, имеют одинаковую априорную вероятность, что нас приводит в точности к статистике Эйнштейна—Бозе¹⁾. С другой стороны, мы пришли бы к иной статистической механике, если бы приняли решения с антисимметричными собственными функциями, так как в этом случае мы имели бы 0 или 1 в качестве числа молекул, ассоциированных с каждой волной. В применении к квантам света должно быть правильным решение с симметричными собственными функциями, так как известно, что статистическая механика Эйнштейна—Бозе приводит к закону Планка для излучения черного тела. Однако для молекул газа, вероятно, правильное решение с антисимметричными собственными функциями, поскольку известно, что оно правильно для электронов в атоме, и следует ожидать, что молекулы скорее похожи на электроны, чем на кванты света.

Мы теперь выведем, придерживаясь хорошо известных принципов, уравнение состояния газа, предполагая, что решение с антисимметричными собственными функциями правильно, так что не более чем одна молекула может быть ассоциирована с каждой волной. Разделим все волны на некоторое число наборов таким образом, чтобы волны в каждом из наборов отвечали молекулам с приблизительно одинаковой энергией. Пусть A_s —число волн в s -м наборе и пусть E_s —кинетическая энергия молекулы, ассоциированной с одной из этих волн. Тогда вероятность распределения (или число антисимметричных собственных функций, отвечающих распределению), в котором N_s молекул ассоциированы с волнами в s -наборе, равна

$$W = \prod_s \frac{A_s!}{N_s! (A_s - N_s)!},$$

¹⁾ Bose // Zs. Phys.—1924.— Bd 26.— 174; Einstein // Sitzungsber. d. Preuss. Ac.—1924.— P. 26; 1925.— P. 3.

что дает для энтропии

$$S = k \ln W = k \sum_s \{A_s (\ln A_s - 1) - N_s (\ln N_s - 1) - (A_s - N_s) [\ln (A_s - N_s) - 1]\}.$$

Эта величина должна быть максимальной, так что

$$0 = \delta S = k \sum_s \{-\ln N_s + \ln (A_s - N_s)\} \delta N_s = k \sum_s \ln (A_s/N_s - 1) \delta N_s$$

при всех вариациях δN_s , оставляющих постоянными полное число молекул $N = \sum_s N_s$ и полную энергию $E = \sum_s N_s E_s$,

так что

$$\sum_s \delta N_s = 0, \quad \sum_s E_s \delta N_s = 0.$$

Таким образом мы получаем

$$\ln (A_s/N_s - 1) = \alpha + \beta E_s,$$

где α и β — постоянные, что дает

$$N_s = \frac{A_s}{e^{\alpha + \beta E_s} + 1}. \quad (19)$$

Варьируя полную энергию E и положив $\delta E/\delta S = T$ (где T — температура), сейчас же находим, что $\beta = 1/kT$, так что формула (19) переходит в

$$N_s = \frac{A_s}{e^{\alpha + E_s/kT} + 1}.$$

Эта формула дает распределение молекул по энергии. В теории Эйнштейна — Бозе соответствующая формула есть

$$N_s = \frac{A_s}{e^{\alpha + E_s/kT} - 1}.$$

Если s -й набор волн состоит из волн, ассоциированных с молекулами, энергия которых лежит между E_s и $E_s + dE_s$, то из (18) получается (E_s теперь имеет смысл E_1 в уравнении (18)), что

$$A_s = 2\pi V (2m)^{3/2} E_s^{1/2} dE_s / (2\pi\hbar)^3,$$

где V — объем газа. Это дает

$$N = \sum_s N_s = \frac{2\pi V (2m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{E_s^{1/2} dE_s}{e^{\alpha + E_s/kT} + 1}$$

$$E = \sum_s N_s E_s = \frac{2\pi V (2m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{E_s^{3/2} dE_s}{e^{\alpha + E_s/kT} + 1}.$$

Исключая α из этих двух уравнений и пользуясь формулой $PV = \frac{2}{3}E$, где P — давление, справедливой в любой статистической механике, получим уравнение состояния.

Явление насыщения, характерное для теории Эйнштейна — Бозе, в настоящем случае не наблюдается. Легко показать, что теплоемкость плавно стремится к нулю при $T \rightarrow 0$ вместо того, чтобы возрастать до точки насыщения, а затем спадать, как в теории Эйнштейна — Бозе.

§ 5. Теория произвольных возмущений

В этом разделе мы рассмотрим задачу об атомной системе, подвергаемой внешнему возмущению (например, входящим электромагнитным полем), которое произвольно меняется со временем. Пусть волновое уравнение невозмущенной системы есть

$$(H - W)\psi = 0, \quad (20)$$

где H — функция только p и q . Его общее решение имеет вид

$$\psi = \sum_n c_n \psi_n, \quad (21)$$

где c_n — постоянные. Мы допустим, что ψ_n выбраны так, что одна функция отвечает каждому стационарному состоянию атома, и что множители выбраны так, что вещественные величины представляются эрмитовыми матрицами.

Предположим теперь, что в момент времени $t=0$ включается возмущение. Волновое уравнение возмущенной системы будет иметь вид

$$(H - W + A)\psi = 0, \quad (22)$$

где A есть функция p , q и t , причем вещественная. Будет показано, что можно получить решение этого уравнения в форме

$$\psi = \sum_n a_n \psi_n, \quad (23)$$

где a_n — функции только t , которые могут иметь произвольные значения c_n в момент $t=0$. Мы будем рассмат-

ривать общее решение (21) уравнения (20) как представляющее ансамбль невозмущенных атомов, причем $|c_n|^2$ — число атомов в n -м состоянии, и предположим, что точно так же (23) представляет ансамбль возмущенных атомов, так что $|a_n(t)|^2$ есть число атомов в n -м состоянии в любой момент времени t . Мы выбираем $|a_n|^2$ вместо любой другой функции a_n , потому что, как будет показано ниже, благодаря этому полное число атомов остается постоянным.

Условие того, что ψ , определенное уравнением (23), удовлетворяет уравнению (22), есть

$$0 = \sum_n (H - W + A) a_n \psi_n = \\ = \sum_n a_n (H - W + A) \psi_n - ih \sum_n \dot{a}_n \psi_n, \quad (24)$$

поскольку H и A коммутируют¹⁾ с a_n , в то время как $W a_n - a_n W = ih \dot{a}_n$ тождественно.

Предположим, что $A \psi_n$ разложено в ряд,

$$A \psi_n = \sum_m A_{mn} \psi_m,$$

где коэффициенты A_{mn} суть функции только t и удовлетворяют условию $A_{mn}^* = A_{nm}$ (здесь звездочка означает комплексное сопряжение, conjugate imaginary). Поскольку $(H - W) \psi_n = 0$, уравнение (24) принимает вид

$$\sum_{mn} a_n A_{mn} \psi_m - ih \sum_m \dot{a}_m \psi_m = 0;$$

для коэффициента при ψ_m находим, что

$$ih \dot{a}_m = \sum_n a_n A_{mn}, \quad (25)$$

а это простое дифференциальное уравнение, показывающее, как a_m меняются во времени.

После комплексного сопряжения находим:

$$-ih \dot{a}_m^* = \sum_n a_n^* A_{mn}^* = \sum_n a_n^* A_{nm}.$$

Поэтому если $N_m = a_m a_m^*$ есть число атомов в m -м состоянии, то имеем

$$ih \dot{N}_m = ih (\dot{a}_m a_m^* + a_m^* \dot{a}_m) = \sum_n (a_n A_{mn} a_m^* - a_n^* A_{nm} a_m),$$

¹⁾ Утверждение, что a коммутирует с b , значит, что $ab - ba = 0$ тождественно.

что даёт

$$ih \sum_n \dot{N}_m = \sum_{nm} (a_n^* A_{mn} a_n - a_n^* A_{nm} a_m) = 0,$$

как то и должно было быть.

Если возмущение представляет собой падающее электромагнитное излучение, движущееся в направлении оси x , плоскополяризованное так, что электрический вектор направлен вдоль оси y , то возмущающий член A в гамильтониане, если пренебречь релятивистской механикой, имеет вид ¹⁾ $\kappa/c \cdot \dot{\eta}$, где η — полная поляризация в направлении оси y , а $(0, \kappa, 0, 0)$ — компоненты потенциала падающего излучения. Мы можем разложить $\eta\psi_n$ и $\dot{\eta}\psi_n$ так, что

$$\eta\psi_n = \sum_n \eta_{mn} e^{i(W_m - W_n)t/h} \psi_m,$$

$$\dot{\eta}\psi_n = \sum_n \dot{\eta}_{mn} e^{i(W_m - W_n)t/h} \psi_m,$$

где η_{mn} и $\dot{\eta}_{mn}$ — постоянные и $\eta_{mn} = i(W_m - W_n)/h \cdot \eta_{mn}$. Наше прежнее A_{mn} есть теперь $\kappa/c \cdot \eta_{mn} e^{i(W_m - W_n)t/h}$ и уравнение (25) переходит в

$$ihc \dot{a}_m = \sum_n a_n \dot{\eta}_{mn} e^{i(W_m - W_n)t/h}. \quad (26)$$

Можно проинтегрировать это уравнение в первом порядке по κ , заменяя a_n в правой части их значениями c_n при $t=0$. Это даёт

$$a_m = c_m + \frac{1}{ihc} \sum_n c_n \dot{\eta}_{mn} \int_0^t \kappa(s) e^{i(W_m - W_n)s/h} ds. \quad (27)$$

Чтобы получить второе приближение, подставим в правую часть (26) в качестве a_s их значения из (27). Тогда для значения a_m в момент T получим

$$a_m = c_m + \frac{1}{ihc} \sum_n c_n \dot{\eta}_{mn} \int_0^T \kappa(t) e^{i(W_m - W_n)t/h} dt -$$

$$- \frac{1}{h^2 c^2} \sum_{nk} c_k \dot{\eta}_{nk} \dot{\eta}_{mn} \int_0^T \kappa(t) e^{i(W_m - W_n)t/h} dt \times$$

$$\times \int_0^t \kappa(s) e^{i(W_n - W_k)s/h} ds = c_m + c'_m + c''_m, \quad (28)$$

¹⁾ Мы пренебрегли членом, содержащим κ^2 . Это приближение законно несмотря даже на то, что мы далее считаем число переходов за время T с точностью до κ^2 , если T велико по сравнению с периодами атомов.

где в последнем равенстве c'_m и c''_m обозначают соответственно члены первого и второго порядка.

Это дает для числа атомов в состоянии m в момент T

$$N_m = \alpha_m \alpha_m^* = c_m c_m^* + c'_m c_m^* + c_m c_m'^* + c'_m c_m'^* + c''_m c_m + c_m c_m''^*.$$

Если мы хотим получить эффекты, не зависящие от начальных фаз атомов, мы должны подставить $c_m \exp i\gamma_m$ вместо c_m и усреднить по всем значениям γ_m от 0 до 2π . Эта процедура обращает в нуль $c'_m c_m^*$ и $c_m c_m'^*$, т. е. члены первого порядка в N_m , в то время как члены второго порядка дают

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\hbar^2 c^2} \sum_n c_n c_n^* \dot{\eta}_{nm} \dot{\eta}_{mn}^* \int_0^T \kappa(t) e^{i(W_m - W_n)t/\hbar} dt \times \\ & \quad \times \int_0^T \kappa(t) e^{-i(W_m - W_n)t/\hbar} dt - \frac{1}{\hbar^2 c^2} \sum_n c_m c_m^* \times \\ & \quad \times \dot{\eta}_{nm} \dot{\eta}_{mn} \int_0^T \kappa(t) e^{i(W_m - W_n)t/\hbar} dt \int_0^t \kappa(s) e^{i(W_n - W_m)s/\hbar} ds - \\ & \quad - \frac{1}{\hbar^2 c^2} \sum_n c_m c_m^* \dot{\eta}_{nm}^* \dot{\eta}_{mn}^* \int_0^T \kappa(t) e^{i(W_m - W_n)t/\hbar} dt \times \\ & \quad \times \int_0^t \kappa(s) e^{i(W_m - W_n)s/\hbar} ds, \end{aligned}$$

что сводится к

$$\frac{1}{\hbar^2 c^2} \sum_n \{ |c_n|^2 - |c_m|^2 \} |\dot{\eta}_{mn}|^2 \left| \int_0^T \kappa(t) e^{i(W_m - W_n)t/\hbar} dt \right|^2. \quad (29)$$

Это дает ΔN_m , т. е. возрастание числа атомов в состоянии m от времени $t=0$ до $t=T$. Отдельный член в сумме с индексом n может рассматриваться как отвечающий за переходы между состоянием n и состоянием m .

Если мы разложим излучение от времени $t=0$ до времени $t=T$ по гармоническим компонентам, то для интенсивности частоты ν на единичном интервале по частотам найдем значение

$$I_\nu = 2\pi\nu^3 c^{-1} \left| \int_0^T \kappa(t) e^{2\pi i\nu t} dt \right|^2.$$

Поэтому член в выражении (29) для ΔN_m , обязанный переходу между состоянием m и состоянием n , может быть

записан в виде

$$\frac{1}{2\pi h^2 v^3 c} \{ |c_n|^2 - |c_m|^2 \} |\eta_{nm}|^2 I_\nu,$$

где

$$2\pi\nu = (W_m - W_n)/h,$$

или как

$$\frac{2\pi}{h^2 c} \{ |c_n|^2 - |c_m|^2 \} |\eta_{nm}|^2 I_\nu.$$

Если мы усредним по всем направлениям и всем поляризационным состояниям падающего излучения, то это выражение перейдет в

$$\frac{2\pi}{3h^2 c} \{ |c_n|^2 - |c_m|^2 \} |P_{nm}|^2 I_\nu,$$

где

$$|P_{nm}|^2 = |\xi_{nm}|^2 + |\eta_{nm}|^2 + |\zeta_{nm}|^2,$$

а ξ , η , ζ — три компоненты полной поляризации. Так что можно сказать, что излучение вызвало $2\pi/(3h^2 c) \cdot |c_n|^2 \times |P_{nm}|^2 I_\nu$ переходов из состояния n в состояние m и $2\pi/(3h^2 c) \cdot |c_m|^2 \cdot |P_{nm}|^2 I_\nu$ переходов из состояния m в состояние n , причем коэффициенты вероятности для каждого процесса

$$B_{n \rightarrow m} = B_{m \rightarrow n} = 2\pi/(3h^2 c) \cdot |P_{mn}|^2$$

находятся в согласии с обычной теорией Эйнштейна.

Таким образом, настоящая теория описывает поглощение и стимулированное испускание излучения и показывает, что элементы матрицы, представляющей полную поляризацию, определяют вероятности переходов. Спонтанную эмиссию нельзя описать без построения более детальной теории, включающей вопрос о положениях различных атомов и интерференции их индивидуальных излучений, поскольку результат будет зависеть от того, распределены ли атомы случайно, или организованы в кристаллической решетке, или же все заключены в объеме, малом по сравнению с длиной волны. Последняя возможность, не представляющая интереса с точки зрения физики, кажется теоретически наиболее простой.

Следует отметить, что мы получили простые результаты Эйнштейна только потому, что усреднили по всем начальным фазам атомов. Следующая аргументация показывает, однако, что начальные фазы имеют важное физическое значение и, следовательно, коэффициенты Эйн-

штейна не дают адекватного описания явления за исключением специальных случаев. Если исходно все атомы находятся в нормальных состояниях, то легко видеть, что выражение (29) для ΔN_m выполняется без процесса усреднения, так что в этом случае аппарат коэффициентов Эйнштейна адекватен. Если теперь мы рассмотрим случай, когда некоторые атомы в начале находятся в возбужденных состояниях, то можно считать, что они были приведены в такое состояние падающим излучением в моменты времени, предшествующие $t = 0$. Действие последующего падающего излучения должно тогда зависеть от соотношения фаз с ранее пришедшим падающим излучением, поскольку правильная трактовка задачи требует разложения обоих падающих излучений в единый интеграл Фурье. Если мы не хотим, чтобы более раннее излучение явно появлялось в вычислениях, то мы должны считать, что оно предписывает некоторые определенные фазы атомам, которые оно возбуждает, и что эти фазы важны для определения действия последующего излучения. Поэтому в таком случае не позволительно усреднять по этим фазам, но надо работать непосредственно с уравнением (28).

3. ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КВАНТОВОЙ ДИНАМИКИ ¹⁾

Proceedings of the Royal Society
A vol. 113 (1927), pp. 621—641

THE PHYSICAL INTERPRETATION OF THE QUANTUM DYNAMICS

By P. A. M. DIRAC, St. John's College, Cambridge;
Institute for Theoretical Physics, Copenhagen

(Communicated by R. H. Fowler, F. R. S.—Received December 2, 1926)

§ 1. Введение и аннотация

Новая квантовая механика состоит из системы уравнений, которые очень близки аналогичным уравнениям классической механики, с тем, однако, фундаментальным отличием, что динамические переменные более не подчиняются коммутативному закону умножения, но вместо этого удовлетворяют хорошо известным квантовым условиям. Отсюда следует, что мы не можем считать динамические переменные обычными числами (c -числами), но можем их назвать специальным родом чисел (q -числами). Теория показывает, что эти q -числа в общем случае могут быть представлены матрицами, элементами которых будут c -числа (зависящие от параметра времени).

Когда все вычисления с q -числами проведены и все нужные матрицы получены, встает вопрос: как получить физические результаты из этой теории, т. е. как получить из теории c -числа, которые можно сравнивать с экспериментальными данными? До сих пор это делалось при помощи ряда специальных предположений. В исходной матричной механике Гейзенберга принималось, что элементы диагональной матрицы, представляющей энергию, это энергетические уровни системы, а элементы матрицы, представляющей полную поляризацию, которые являются периодическими функциями времени, определяют частоты и интенсивности спектральных линий по аналогии с классической теорией. Шредингерovo волновое представление

¹⁾ Перевод с английского М. К. Поливанова.

квантовой механики предложило новый способ получения физических результатов в этой теории, основанный на предположении, что квадрат амплитуды волновой функции может в некоторых случаях интерпретироваться как вероятность. Из этого предположения можно, например, получить вероятность переходов в системе (или число переходов в ансамбле одинаковых систем), вызванных произвольной внешней возмущающей силой¹⁾, и, следовательно, предполагая, что возмущением является падающее излучение, непосредственно получить *V*-коэффициенты Эйнштейна. В борновской трактовке задачи рассеяния²⁾ предполагается, что квадрат амплитуды волновой функции, рассеянной в некотором направлении, определяет вероятность, что сталкивающийся электрон (или иное тело) будет рассеян в этом направлении.

Недавно Гейзенбергу удалось найти еще одну точку соприкосновения теории и эксперимента несколько иной природы³⁾. Если рассмотреть задачу о двух атомных системах, находящихся в резонансе, т. е. когда энергия пульсирует между двумя системами, можно найти среднюю по времени энергию одной из них, предположив, что это среднее по времени задается диагональным элементом матрицы, которая представляет энергию этой системы. Подобным образом можно найти среднее по времени квадрата этой энергии, куба этой энергии и т. д. Гейзенберг показал, что таким образом сосчитанные временные средние в точности совпадают с тем, что мы ожидали бы, предполагая, что энергия меняется скачком от одного квантованного значения к другому. Можно поэтому считать, что теория говорит о том, что энергия действительно меняется скачком от одного квантованного значения к другому и позволяет сосчитать долю полного времени, в течение которого энергия имеет любое заданное значение, однако не дает никаких сведений о времени этих переходов.

Этот результат можно широко обобщить. Его можно применять к любой системе, не обязательно состоящей из двух частей, находящихся в резонансе друг с другом, и к любой динамической величине, не обязательно к такой,

¹⁾ См. *Schrödinger* // *Ann. d. Phys.* — 1926. — Bd 81. — S. 112; см. также § 5 в работе автора: *Proc. Roy. Soc. A.* — 1926. — V. 112. — P. 661. (Предыдущая статья этого сборника. — *Примеч. ред.*)

²⁾ *Born* // *Zs Phys.* — 1926. — Bd 37. — S. 863; Bd 38. — S. 803.

³⁾ Я благодарен доктору Гейзенбергу, сообщившему мне о своих результатах до их публикации.

которая принимает лишь квантованные значения. Можно (пренебрегая трудностями, связанными с вырождением) считать временное среднее любой динамической переменной, скажем g , для любого стационарного состояния системы и так же точно — временное среднее g^2 , g^3 и т. д. Сведения, полученные таким путем относительно g , рассматриваемой как функция времени, могут быть подытожены в виде утверждения о доле времени, в течение которого g лежит в промежутке между двумя указанными числовыми значениями, например g' и g'' . Относительно интервалов времени, в течение которых выполнено это условие, нельзя сказать ничего, кроме указания той доли, которую они составляют от полного времени.

Таким образом оказывается, что на определенные вопросы относительно системы, которые могут быть заданы в рамках классической теории (например, вопрос: какую долю полного времени проводит g между двумя определенными значениями?), определенный и однозначный ответ может быть дан в квантовой теории, так же как и в классической. В настоящей статье будет развита общая теория таких вопросов и способов получения ответов на них. Это позволит выявить все физические сведения, которые можно надеяться получить из квантовой динамики, и предложит общий метод их получения, способный заменить все специальные предположения, которые делались прежде, и, может быть, позволит пойти дальше. Рассмотренные выше вопросы, касающиеся доли полного времени, в течение которого выполняются определенные условия, не представляют собой удобную начальную позицию для такого исследования, поскольку определенные ответы на них могут быть даны только для невырожденных систем, а система всегда вырождена, если два или более ее первых интегралов могут принимать значения в непрерывном интервале. Поэтому мы подойдем к этому предмету с более общей точки зрения.

Общий вопрос классической механики может быть сформулирован следующим образом: каково значение любой из постоянных интегрирования¹⁾ g для данной динамической системы при любых заданных начальных условиях, описываемых числовыми значениями q'_{r_0} , p'_{r_0} , напри-

¹⁾ Термин «постоянная интегрирования» включает такие величины, как значение изменяющейся координаты или импульса в определенный момент времени $t = t_0$. В квантовой теории такое «значение» будет q -числом, в то время как t_0 , разумеется, — c -числом.

мер, начальных координат и импульсов q_{r0}, p_{r0} ? Динамическая теория позволяет выразить g в виде функции q_{r0}, p_{r0} , и после этого достаточно подставить в эту функцию для q_{r0}, p_{r0} значения q'_{r0}, p'_{r0} , чтобы получить ответ на поставленный вопрос. В квантовой теории тоже можно получить выражение для g в виде функции от q_{r0}, p_{r0} , однако q_{r0} и p_{r0} более не удовлетворяют коммутативному закону умножения, так что если подставлять числовые значения для них, то ответ будет зависеть, вообще говоря, от порядка, в котором они предварительно были поставлены. Таким образом, не удастся дать однозначный ответ на этот вопрос в квантовой теории.

В квантовой теории нельзя ответить ни на какой вопрос, относящийся сразу к числовым значениям и q_{r0} , и p_{r0} . Однако можно ожидать, что удастся получить ответы на вопросы, где только q_{r0} или только p_{r0} принимают определенные числовые значения, или — более общо — когда определенные числовые значения имеет любой набор постоянных интегрирования ξ_r , коммутирующих между собой. Пусть η_r — переменные, канонически сопряженные к ξ_r , и мы хотим знать, что можно сказать относительно g , рассматриваемой как функция η_r , когда ξ_r принимают эти определенные значения. Мы покажем, что можно без произвола определить ту долю всего η -пространства, которая характеризуется тем, что g лежит между любыми двумя определенными числовыми значениями. В общем случае, если g_1, g_2, \dots — набор постоянных интегрирования, коммутирующих друг с другом, можно определить ту долю всего η -пространства, в которой каждое g_r лежит между определенными числовыми значениями. Таким образом, если задан ансамбль одинаковых систем, имеющих одинаковые числовые значения для ξ_r , и мы предполагаем, что они равномерно распределены в η -пространстве, то можно определить число систем, у которых каждое из g_r лежит в промежутке между двумя определенными числовыми значениями. Оказывается, что квантовая теория может давать ответы единственно лишь на вопросы такого типа и, вероятно, только на такие вопросы и требуется ответ физику.

Чтобы отвечать на вопросы, в которых предусматривается, что ξ_r принимают определенные числовые значения, для представления динамических переменных необходима схема с матрицами, строки и столбцы которых соотнесены числовым значениям ξ_r . В большинстве задач об атомах в начале электроны находятся на определенных

орбитах. Для этих задач мы можем выбрать ξ_r в качестве начальных данных для переменных действия J_r (или для других первых интегралов, определяющих орбиты) и затем с помощью обычного матричного представления определить долю ω -пространства, для которой выполнены некоторые определенные условия. Однако есть некоторые задачи, для которых электроны в начале не находятся на определенных орбитах (например, задача о взаимодействии β -частицы, излученной радиоактивным атомом, с орбитальными электронами атома, для которой β -частица первоначально находится в ядре). Для таких задач нам нужно матричное представление динамических переменных, строки и столбцы которых относятся не к переменным действия, а к другим постоянным интегрирования системы, таким, чтобы начальные условия можно было описывать, указывая числовые значения этих постоянных интегрирования. (В примере с β -частицей было бы, вероятно, удобно связать столбцы и строки матрицы с координатой β -частицы в момент ее эмиссии, скажем, при $t = t_0$. Нам были бы тогда интересны лишь те столбцы и строки матриц, которые относятся к β -частице, находящейся в момент $t = t_0$ в ядре, и мы смогли бы сосчитать, в каком интервале должен лежать ее начальный импульс для того, чтобы любое взаимодействие некоего специального вида, описываемое числовыми значениями некоторых постоянных интегрирования, могло осуществиться. Мы должны были бы получить затем вероятность этого взаимодействия исходя из предположения, что все направления эмиссии одинаково вероятны.)

Таким образом, то, что нам нужно, — это более общая теория матричного представления, в которой столбцы и строки отвечают любому набору коммутирующих постоянных интегрирования, и законы преобразования от одной такой матричной схемы к другой (это все изложено в §§ 3—5). Такая теория может рассматриваться как развитие полевой теории Ланцоша¹⁾. В теории Ланцоша поле представляется, в сущности, матрицей, столбцы и строки которой нумеруются непрерывным параметром, а не обычным дискретным.

В § 6 мы применяем теорию преобразований к исследованию общего метода получения физических результатов из матричной механики, а в § 7 показано, что этот

¹⁾ *Lanczos // Zs Phys.* — 1926. — Bd 35. — S. 812.

общий метод согласуется с различными специальными предположениями, которые с этой целью употреблялись в прежних теориях.

§ 2. Обозначения

В обычной матричной механике мы имеем дело с матрицами, представляющими динамические переменные, и их столбцы и строки соотносятся со стационарными состояниями системы. Поэтому, если $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_u$ — первые интегралы уравнений движения (переменные действия или какие-либо другие переменные), а u — число степеней свободы, то каждый столбец или строка могут быть помечены определенными значениями $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_u$, скажем: $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_u$ — и мы можем записать элементы матрицы, представляющей любую динамическую переменную g , в виде $g(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_u, \alpha''_1, \alpha''_2, \dots, \alpha''_u)$ или, короче, $g(\alpha', \alpha'')$. Эти матричные элементы зависят только от времени. В настоящей статье мы не принимаем во внимание релятивистскую механику и переменную времени, где бы она ни появлялась, рассматриваем просто как параметр (c — число).

Параметры, нумерующие столбцы и строки, могут принимать или дискретный набор значений, или все значения в некотором интервале, или, наконец, и те и другие. Формулы без необходимости усложняются, если писать их, учитывая обе возможности. Случай непрерывного интервала значений — более общий и типичный. Поэтому будем писать все формулы так, как если бы эти параметры принимали только непрерывные значения, подразумевая, что необходимые изменения должны быть введены, если появляются дискретные наборы. Матричный закон умножения имеет теперь вид

$$ab(\alpha'\alpha'') = \int a(\alpha'\alpha''') d\alpha''' \cdot b(\alpha'''\alpha''),$$

где $d\alpha'''$ означает $d\alpha'''_1 \cdot d\alpha'''_2 \cdot \dots \cdot d\alpha'''_u$, а интегрирование ведется по всем значениям α''' , которые нумеруют столбцы и строки матриц¹⁾.

¹⁾ Если специально не указаны пределы интегрирования, то следует понимать интегрирование по всему интервалу изменения параметров, которыми мы пользуемся для нумерации строк и столбцов матрицы.

Нельзя далеко продвинуться в теории матриц с непрерывной нумерацией столбцов и строк, не вводя такой особой функции δ -числа x , которая равна нулю везде, за исключением лишь очень малых x , и интеграл которой по интервалу, включающему точку $x=0$, равен единице. Мы будем пользоваться символом $\delta(x)$ для обозначения этой функции, т. е. $\delta(x)$ определяется свойствами

$$\delta(x) = 0, \quad \text{если } x \neq 0,$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1.$$

Строго говоря, конечно, $\delta(x)$ не есть истинная функция x , но может рассматриваться только как предел некоторой последовательности функций. Тем не менее можно пользоваться $\delta(x)$ так, как если бы она была настоящей функцией, практически во всех случаях в квантовой механике, и это не приводит к неверным результатам. Можно пользоваться также дифференциальными коэффициентами $\delta(x)$, т. е. функциями $\delta'(x)$, $\delta''(x)$, ..., которые еще более разрывны и менее «истинны», чем сама $\delta(x)$.

Мы приведем сейчас некоторые элементарные свойства этих функций, чтобы позже не прерывать изложения. Очевидно мы должны положить $\delta(-x) = \delta(x)$, $\delta'(-x) = -\delta'(x)$ и так далее. Условие $\delta(x) = 0$ всюду, кроме точки $x=0$, можно выразить алгебраическим уравнением $x\delta(x) = 0$. (Этим уравнением вместе с уравнением $\delta(x) \cdot x = 0$ можно воспользоваться для определения $\delta(x)$, когда x есть q -число или матрица). Если $f(x)$ — любая регулярная функция x и a — произвольное δ -число, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(a-x) dx = f(a), \quad (1)$$

так что операция умножения на $\delta(a-x)$ и последующего интегрирования по x эквивалентна подстановке a вместо x . С помощью интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta'(a-x) dx &= [-f(x) \delta(a-x)]_{-\infty}^{\infty} + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \delta(x-a) dx = f'(a), \quad (1') \end{aligned}$$

так как проинтегрированный член исчезает на обоих пределах; и вообще,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta^{(n)}(a-x) dx = f^{(n)}(a), \quad (1'')$$

так что операция умножения на $\delta^{(n)}(a-x)$ и интегрирования по x эквивалентна операции n -кратного дифференцирования по x и подстановки a вместо x .

Покажем теперь, что если b —другое c -число, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a-x) \delta(x-b) dx = \delta(a-b). \quad (2)$$

Если рассматривать левую часть как функцию от b и обозначить ее $\varphi(b)$, то мы увидим, что $\varphi(b)$ равна нулю, если b заметно отличается от a , и что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(b) db = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(a-x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-b) db = 1.$$

Значит, $\varphi(b)$ обладает всеми свойствами $\delta(a-b)$ и может быть положена равной $\delta(a-b)$. Если бы мы в (1) положили $f(x)$ равной $\delta(x-b)$, то получили бы уравнение (2). Так что это как раз такой случай, когда можно пользоваться $\delta(x-b)$, как если бы это была регулярная функция x , и получить правильный результат. Другой такой случай получим, полагая $f(x)$ равной $\delta'(x-b)$ или, вообще, $\delta^{(n)}(x-b)$, что приводит к уравнениям

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(a-x) \delta(x-b) dx = \delta'(a-b) \quad (2')$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(a-x) \delta^{(n)}(x-b) dx = \delta^{(n+1)}(a-b). \quad (2'')$$

Уравнение (2) может быть независимо проверено путем частного дифференцирования (2) по a , а потом (2'') проверяется частным дифференцированием (2') n раз по x .

Из (1'), положив $f(x) = x$ и $a = 0$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} -x \delta'(x) dx = 1.$$

Но $-x\delta'(x)$ как функция от x исчезает, если только значение $|x|$ не весьма мало. Значит, $-x\delta'(x)$ имеет все свойства $\delta(x)$, и можно написать

$$-x\delta'(x) = \delta(x). \quad (3)$$

Когда мы имеем дело с матрицами с непрерывной нумерацией столбцов и строк, δ -функция нужна нам для выражения элементов единичной матрицы. Единичная матрица по определению должна быть такой, что ее умножение на любую матрицу y равно этой самой матрице, т. е. мы должны иметь

$$\int 1(\alpha'\alpha''') d\alpha'''\ y(\alpha'''\alpha'') = y(\alpha'\alpha'').$$

Поэтому мы заключаем, что

$$1(\alpha'\alpha''') = \delta(\alpha'_1 - \alpha''_1) \delta(\alpha'_2 - \alpha''_2) \dots \delta(\alpha'_n - \alpha''_n) = \delta(\alpha' - \alpha''').$$

Последнее обозначение введено для краткости. Общая диагональная матрица $f(x)$ имеет элементы $f(\alpha') \delta(\alpha' - \alpha'')$. Мы будем называть $f(\alpha')$ диагональными элементами этой матрицы.

§ 3. Уравнения преобразований

Решение задачи в матричной механике Гейзенберга состоит в отыскании собрания матриц, представляющих динамические переменные и удовлетворяющих следующим условиям:

- (i) Квантовые условия $q_r p_r - p_r q_r = ih$ и т. п.
- (ii) Уравнения движения $gH - Hg = ihg$, или, если g явно зависит от времени, $gH - Hg + ih \partial g / \partial t = ihg$.
- (iii) Матрица, представляющая гамильтониан H , должна быть диагональной матрицей.

(iv) Матрицы, представляющие вещественные переменные, должны быть эрмитовыми. Собрание матриц, удовлетворяющих этим условиям, вообще говоря, не единственно. Если каждую из матриц g подвергнуть каноническому преобразованию

$$G = bgb^{-1}, \quad (4)$$

где b — любая матрица, то G будет удовлетворять всем алгебраическим соотношениям, которым удовлетворяли исходные матрицы; в частности, они будут удовлетворять и квантовым условиям. Так же, если элементы матрицы b не зависят от времени, так что $\dot{G} = b\dot{g}b^{-1}$, то новые матрицы

будут удовлетворять уравнениям движения. Далее, если b коммутирует с H , то новая матрица, представляющая гамильтониан, будет диагональной матрицей и если, кроме того, элементы матриц b и b^{-1} удовлетворяют условиям, что $b(\alpha'\alpha'')$ и $b^{-1}(\alpha''\alpha')$ комплексно сопряжены, то каждая матрица G будет эрмитовой, если эрмитова матрица g . Значит когда эти условия выполнены, новые матрицы удовлетворяют условиям (i)—(iv) и могут так же хорошо представлять динамические переменные, как и исходные. Мы разовьем теорию таких преобразований, а также и более общих преобразований, когда собрание матриц удовлетворяет только условиям (i) и (ii); это значит, что матрицы b и b^{-1} должны удовлетворять лишь условию, что их элементы не зависят от t .

Уравнение (4) можно записать в виде

$$G(\alpha'\alpha'') = \int \int b(\alpha'\alpha''') d\alpha''' \cdot g(\alpha''' \alpha^{(4)}) d\alpha^{(4)} \cdot b^{-1}(\alpha^{(4)} \alpha''). \quad (5)$$

Производя преобразования такого рода, мы можем в то же время сделать любую перестановку строк новой матрицы G и ту же перестановку столбцов, не вступая в противоречие ни с одним из условий (i)...(iv), которым они удовлетворяют. Следовательно, не существует однозначного соответствия между строками и столбцами новых матриц и строками и столбцами исходных. Обозначения, употребляемые в уравнении (5), неудовлетворительны, так как в них подразумевается, что такое однозначное соответствие существует, поскольку тот же символ α' или $(\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_n)$ употребляется для обозначения строки и столбца как в матрицах G , так и в матрицах g . Поэтому мы модифицируем обозначения и перепишем уравнения (5) в виде

$$G(\xi'_1 \xi'_2 \dots \xi'_n; \xi''_1 \xi''_2 \dots \xi''_n) = G(\xi' \xi'') = \int \int b(\xi' \alpha') d\alpha' g(\alpha' \alpha'') d\alpha'' b^{-1}(\alpha'' \xi''), \quad (5')$$

где новые параметры ξ'_r совершенно не связаны с α' . Параметры ξ''_r могут иметь иные области изменения, не такие, как α' , и даже может случиться, что ξ''_r принимают лишь дискретные значения, в то время как α' может быть непрерывным, или наоборот.

Теперь возникает вопрос, как нумеровать строки и столбцы новых матриц G , т. е. как нужно приписывать каждой строке и соответствующему столбцу набор числовых значений параметра ξ'_r . Чтобы сделать это разумным

образом, надо найти те функции динамических переменных, скажем, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, которые диагональны в новом матричном представлении, и затем приписать каждой строке и соответствующему столбцу значение ξ'_r диагонального элемента, стоящего в этой строке и столбце каждого ξ_r . Следовательно, нумерация устраивается так, чтобы каждый ξ_r имел матричные элементы

$$\xi_r(\xi' \xi'') = \xi'_r \delta(\xi'_1 - \xi''_1) \delta(\xi'_2 - \xi''_2) \dots \delta(\xi'_n - \xi''_n) = \xi'_r \delta(\xi' - \xi''). \quad (6)$$

Динамические переменные ξ_r используются для нумерации строк и столбцов новых матриц в точности так же, как динамические переменные α_r использовались для нумерации строк и столбцов исходных матриц.

Эти ξ_r должны быть постоянными интегрирования системы, так как их матричные элементы не содержат t . Они должны также коммутировать друг с другом, поскольку диагональные матрицы всегда коммутируют. Следовательно, ξ_r образуют набор канонических координат, и им будет отвечать набор канонически сопряженных импульсов, скажем, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$.

Матрицы b и b^{-1} удовлетворяют условиям $bb^{-1} = 1$ и $b^{-1}b = 1$, т. е.

$$\int b(\xi' \alpha') d\alpha' \cdot b^{-1}(\alpha' \xi'') = \delta(\xi' - \xi'')$$

и

$$\int b^{-1}(\alpha' \xi') d\xi' \cdot b(\xi' \alpha'') = \delta(\alpha' - \alpha'').$$

Итак, матричные элементы $b(\xi' \alpha')$ и $b^{-1}(\alpha' \xi')$ образуют две системы взаимно ортогональных и нормированных функций, рассматриваем ли мы их как функции от α' , нумеруемые значениями параметра ξ' , или как функции от ξ' , нумеруемые значениями параметра α' . Любые две таких взаимно ортогональных и нормированных системы определяют преобразование к новой системе матриц, удовлетворяющих условиям (i) и (ii). Если, кроме того, $b(\xi' \alpha')$ и $b^{-1}(\alpha' \xi')$ комплексно сопряжены, то новая система матриц будет также удовлетворять условию (iv). Для того, чтобы новая система матриц удовлетворяла условию (iii), ξ должны коммутировать с H . Отсюда следует, что, так как ξ — постоянные интегрирования, то они должны быть функциями исходных канонических переменных q_r и p_r , не зависящими явно от t .

Теперь мы немного упростим обозначения. В уравнении (5') нет нужды пользоваться разными символами g

и G , чтобы обозначить одну и ту же каноническую переменную, представленную матрицей в соответствии со старой или новой системой, поскольку сами параметры (ξ' и ξ'' или α' и α'') показывают совершенно определенно, к какой системе принадлежит матричный элемент. Поэтому мы будем пользоваться всегда одним и тем же символом, например g , для обозначения любой частной динамической переменной и, в зависимости от того, какой системой матриц мы пользуемся, будем писать $g(\alpha'\alpha'')$ или $g(\xi'\xi'')$. Далее, функции преобразования $b(\xi'\alpha')$ и $b^{-1}(\alpha'\xi')$ достаточно определены, если писать их просто как (ξ'/α') и (α'/ξ') . Поэтому уравнение (5') в упрощенной форме запишется так:

$$g(\xi'\xi'') = \int (\xi'/\alpha') d\alpha' \cdot g(\alpha'\alpha'') d\alpha'' (\alpha''/\xi''). \quad (5'')$$

Мы примем за правило всегда употреблять нештрихованные буквы, такие как g или ξ_r , для обозначения динамических переменных (или q -чисел) и штрихованные или кратно-штрихованные буквы, такие как ξ' и α'' , для записи параметров, обозначающих строки и столбцы матриц. Они могут иметь определенные числовые значения и суть c -числа.

Уравнение преобразования (5'') одинаково легко может быть записано в любой из следующих форм:

$$\int (\alpha'/\xi') d\xi' \cdot g(\xi'\xi'') d\xi'' (\xi''/\alpha'') = g(\alpha'\alpha''),$$

или, скажем,

$$\left. \begin{aligned} \int g(\xi'\xi'') d\xi'' (\xi''/\alpha') &= \int (\xi'/\alpha'') d\alpha'' \cdot g(\alpha''\alpha') = g(\xi'\alpha') \\ \text{или} \\ \int (\alpha'/\xi'') d\xi'' \cdot g(\xi''\xi') &= \int g(\alpha'\alpha'') d\alpha'' (\alpha''/\xi') = g(\alpha'\xi'), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

что отвечает соответственно матричным уравнениям (записанным в старых обозначениях)

$$b^{-1}Gb = g, \quad Gb = bg, \quad b^{-1}G = b^{-1}g,$$

немедленно следующим из (4). Выражения $g(\xi'\alpha')$ и $g(\alpha'\xi')$, выведенные в уравнениях (7), могут рассматриваться как элементы двух матриц, представляющих динамическую переменную g в двух новых более общих системах, в которых строки и столбцы матриц относятся к разным вещам. Теперь больше нет однозначного соответствия между строками и столбцами, так что диагональная матрица в этих новых матричных системах не

имеет смысла. Матрицы с элементами (ξ'/α') и (α'/ξ') — это единичные матрицы в соответствующих системах, так как уравнения (7) показывают, что эти матрицы, умноженные на матрицу, представляющую произвольное q -число g , дают матрицы, представляющие то же g .

Если применить последовательно два канонических преобразования с матрицами b_1 и b_2 , т. е.

$$G = b_1 g b_1^{-1}, \quad G^* = b_2 G b_2^{-1},$$

то результат будет тот же, что и при едином преобразовании с матрицей $b_2 b_1$, так как

$$G^* = b_2 b_1 g b_1^{-1} b_2^{-1} = (b_2 b_1) g (b_2 b_1)^{-1}.$$

Переведем это утверждение в новые обозначения. Получим теорему о том, что последовательное применение двух канонических преобразований с преобразующими функциями (ξ'/α') , (α'/ξ') и (κ'/ξ') , (ξ'/κ') , соответственно, эквивалентно единому преобразованию с преобразующими функциями

$$(\kappa'/\alpha') = \int (\kappa'/\xi') d\xi' (\xi'/\alpha')$$

и

$$(\alpha'/\kappa') = \int (\alpha'/\xi') d\xi' (\xi'/\kappa').$$

§ 4. Некоторые элементарные матрицы

Матричные элементы ξ задаются уравнением (6). Давайте определим теперь элементы матриц, канонически сопряженных к ξ . Можно показать, что матрицы η_r , элементы которых определены посредством

$$\eta_r (\xi' \xi'') = -i\hbar \delta (\xi'_1 - \xi''_1) \dots \dots \delta (\xi'_{r-1} - \xi''_{r-1}) \delta' (\xi'_r - \xi''_r) \delta (\xi'_{r+1} - \xi''_{r+1}) \dots \delta (\xi'_u - \xi''_u), \quad (8)$$

удовлетворяют каноническим отношениям

$$\eta_r \eta_s - \eta_s \eta_r = 0, \quad \xi_r \eta_s - \eta_s \xi_r = 0 \quad (r \neq s)$$

и

$$\xi_r \eta_r - \eta_r \xi_r = i\hbar.$$

Первые два отношения легко проверяются с помощью (2') и (2). Мы докажем третье для случая единственной степени свободы ($u=1$). Доказательство для нескольких степеней свободы — в точности такое же, просто оно не так легко записывается.

Для одной степени свободы будет

$$\xi(\xi'\xi'') = \xi'\delta(\xi' - \xi'')$$

и

$$\eta(\xi'\xi'') = -ih\delta'(\xi' - \xi''),$$

так что

$$\begin{aligned} (\xi\eta - \eta\xi)(\xi'\xi'') &= \\ &= -ih \int \{ \xi'\delta(\xi' - \xi''') \cdot \delta'(\xi''' - \xi'') - \\ &\quad - \delta'(\xi' - \xi''') \cdot \xi''' \delta(\xi''' - \xi'') \} d\xi''' = \\ &= -ih \int \left\{ \xi'\delta(\xi' - \xi''') \cdot \delta'(\xi''' - \xi'') - \right. \\ &\quad \left. - \delta(\xi' - \xi''') \frac{\partial}{\partial \xi'''} [\xi''' \delta(\xi''' - \xi'')] \right\} d\xi''', \end{aligned}$$

где второй член мы проинтегрировали по частям. Поэтому

$$\begin{aligned} (\xi\eta - \eta\xi)(\xi'\xi'') &= \\ &= -ih \int \{ (\xi' - \xi''') \delta(\xi' - \xi''') \delta'(\xi''' - \xi'') - \\ &\quad - \delta(\xi' - \xi''') \delta(\xi''' - \xi'') \} d\xi'''. \end{aligned}$$

Первый член под интегралом исчезает вследствие $(\xi' - \xi''') \delta(\xi' - \xi''') = 0$, а второй может быть сосчитан с помощью (2). Так получаем то, что требуется:

$$(\xi\eta - \eta\xi)(\xi'\xi'') = ih\delta(\xi' - \xi'').$$

Канонически сопряженные к ξ_r переменные, разумеется, не определяются однозначно, если задано $\{\xi_r\}$, так как переменная

$$\eta_r^* = \eta_r + \partial F / \partial \xi_r, \quad (9)$$

где F — произвольная функция ξ_r , также будет сопряжена к ξ_r , если η_r сопряжена. Это соответствует тому, что матричное представление не определено единственным образом, когда заданы переменные ξ_r , являющиеся диагональными матрицами и нумерующие строки и столбцы. В самом деле, можно умножить каждую строку (ξ') на произвольную функцию $f(\xi')$ параметров ξ'_r и поделить соответствующий столбец на ту же величину, и эта операция не нарушит справедливости ни одного из матричных уравнений и не изменит диагональных матриц. Однако эта процедура изменит матрицы η_r , определенные

посредством (8), заменив их на

$$\begin{aligned} \eta_r^*(\xi' \xi'') &= \eta_r(\xi' \xi'') \frac{f(\xi')}{f(\xi'')} = \eta_r(\xi' \xi'') + \eta_r(\xi' \xi'') \frac{f(\xi') - f(\xi'')}{f(\xi'')} = \\ &= \eta_r(\xi' \xi'') + \frac{\eta_r(\xi' \xi'')}{f(\xi'')} \sum_s \frac{\partial f(\xi')}{\partial \xi_s'} (\xi_s' - \xi_s''). \end{aligned}$$

Каждый член в сумме, кроме числа $s=r$, исчезает после умножения на $\eta_r(\xi' \xi'')$, потому что сомножитель $(\xi_s' - \xi_s'')$ обращается в нуль при умножении на $\delta(\xi_s' - \xi_s'')$, которая содержится в $\eta_r(\xi' \xi'')$, когда $s \neq r$. С другой стороны, множитель $(\xi_r' - \xi_r'')$ в члене $s=r$ домножается на $\delta'(\xi_r' - \xi_r'')$ в $\eta_r(\xi' \xi'')$, и вследствие уравнения (3) их произведение есть в точности $-\delta(\xi_r' - \xi_r'')$. Итак, мы получаем

$$\begin{aligned} \eta_r^*(\xi' \xi'') &= \eta_r(\xi' \xi'') + \frac{ih}{f(\xi')} \frac{\partial f(\xi')}{\partial \xi_r'} \delta(\xi' - \xi'') = \\ &= \eta_r(\xi' \xi'') + \frac{ih}{f(\xi)} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_r} (\xi' \xi''), \end{aligned}$$

что согласуется с (9), если положить $F = ih \ln f$.

Для одной степени свободы при помощи (2'') сразу находим, что матричные элементы η^2 имеют вид

$$\begin{aligned} \eta^2(\xi' \xi'') &= (-ih)^2 \int \delta'(\xi' - \xi''') d\xi''' \cdot \delta'(\xi''' - \xi'') = \\ &= (-ih)^2 \delta''(\xi' - \xi''), \end{aligned}$$

и в более общем случае, по индукции, что

$$\eta^n(\xi' \xi'') = (-ih)^n \delta^{(n)}(\xi' - \xi'').$$

Следовательно, если a — произвольное c -число, то элементы матрицы $e^{ia\eta}$ задаются посредством

$$\begin{aligned} e^{ia\eta}(\xi' \xi'') &= \sum \frac{1}{n!} (ia\eta)^n (\xi' \xi'') = \\ &= \sum \frac{1}{n!} (ah)^n \delta^{(n)}(\xi' - \xi'') = \delta(\xi' - \xi'' + ah) \end{aligned}$$

с помощью теоремы о разложении в ряд Тейлора¹⁾. Таким образом, матрица $e^{ia\eta}$ содержит лишь элементы, отвечающие «переходам», в которых ξ меняется на величину ah , как и ожидалось. Подобные результаты получаются при любом числе степеней свободы, однако их доказательство не так легко записать.

¹⁾ Применение теоремы Тейлора к функции $\delta(x)$ представляется законным, поскольку $\delta(x)$ может рассматриваться как предел последовательности функций, для каждой из которых теорема Тейлора выполняется.

§ 5. Теория преобразований

Рассмотрим теперь преобразования между двумя произвольными системами матриц, скажем, (ξ) и (η) , удовлетворяющих лишь условиям (i) и (ii) из § 3. Имеем

$$\eta_1(\xi' \xi'') = -ih \delta'(\xi'_1 - \xi''_1) \cdot \delta(\xi'_2 - \xi''_2) \dots \delta(\xi'_u - \xi''_u),$$

откуда с помощью уравнений (1) и (1') получим

$$\eta_1(\xi' \alpha') = \int \eta_1(\xi' \xi'') d\xi''(\xi''/\alpha') = -ih \frac{\partial(\xi'/\alpha')}{\partial \xi'_1},$$

и вообще,

$$\eta_r(\xi' \alpha') = -ih \frac{\partial(\xi'/\alpha')}{\partial \xi'_r}.$$

Имеем далее

$$\xi_r(\xi' \alpha') = \int \xi_r \delta(\xi' - \xi'') d\xi''(\xi''/\alpha') = \xi'_r(\xi'/\alpha'),$$

и вообще, если $f(\xi_r)$ — любая функция только ξ_r , то

$$f(\xi_r)(\xi' \alpha') = \int f(\xi_r) \delta(\xi' - \xi'') d\xi''(\xi''/\alpha') = f(\xi'_r)(\xi'/\alpha').$$

Покажем теперь, что если $f(\xi_r, \eta_r)$ — произвольная функция ξ_r и канонически сопряженных им η_r , определенных формулой (8) (причем f — рациональная и целая функция η_r), то

$$f(\xi_r, \eta_r)(\xi' \alpha') = f\left(\xi'_r, -ih \frac{\partial}{\partial \xi'_r}\right)(\xi'/\alpha'), \quad (10)$$

так что элементы матрицы, представляющей f в системе $(\xi' \alpha')$, задаются некоторым оператором, действующим на функцию преобразования (ξ'/α') . Достаточно доказать, что если теорема справедлива для любых двух функций, скажем f_1 и f_2 , то она справедлива также для их суммы $f_1 + f_2$ и для их произведения $f_1 f_2$. Случай суммы тривиален. Для произведения имеем

$$\begin{aligned} f_1(\xi_r, \eta_r) f_2(\xi_r, \eta_r)(\xi' \alpha') &= \\ &= \iint f_1(\xi_r, \eta_r)(\xi' \alpha'') d\alpha'' \cdot (\alpha''/\xi'') d\xi'' \cdot f_2(\xi_r, \eta_r)(\xi' \alpha') = \\ &= \iint f_1\left(\xi'_r, -ih \frac{\partial}{\partial \xi'_r}\right)(\xi'/\alpha'') d\alpha'' \cdot (\alpha''/\xi'') d\xi'' \times \\ &\times f_2\left(\xi'_r, -ih \frac{\partial}{\partial \xi'_r}\right)(\xi'/\alpha') = f_1\left(\xi'_r, -ih \frac{\partial}{\partial \xi'_r}\right) \iint (\xi'/\alpha'') d\alpha'' \times \\ &\times (\alpha''/\xi'') d\xi'' \cdot f_2\left(\xi'_r, -ih \frac{\partial}{\partial \xi'_r}\right)(\xi'/\alpha') = \\ &= f_1\left(\xi'_r, -ih \frac{\partial}{\partial \xi'_r}\right) f_2\left(\xi'_r, -ih \frac{\partial}{\partial \xi'_r}\right)(\xi'/\alpha'), \end{aligned}$$

что и требовалось. Таким же способом можно показать, что

$$f(\xi_r, \eta_r)(\alpha' \xi') = f\left(\xi_r, -ih \frac{\partial}{\partial \xi_r}\right)(\alpha' / \xi'). \quad (10')$$

Формула (10) дает важный инструмент для получения такого матричного представления, которое любую заданную функцию динамических переменных превращает в диагональную матрицу. Допустим, например, что нам задана функция переменных ξ и η , скажем $F(\xi_r, \eta_r)$, и мы хотим иметь такое матричное представление, скажем (α) , в котором F —диагональная матрица, т. е. мы хотим, чтобы было

$$F(\alpha' \alpha'') = F(\alpha') \cdot \delta(\alpha' - \alpha''),$$

где $F(\alpha')$ —некоторая функция одного набора параметров α' . Формула (10) показывает, что

$$\begin{aligned} F\left(\xi_r, -ih \frac{\partial}{\partial \xi_r}\right)(\xi' / \alpha') &= F(\xi_r, \eta_r)(\xi' \alpha') = \\ &= \int (\xi' / \alpha'') d\alpha'' \cdot F(\alpha'' \alpha') = F(\alpha')(\xi' / \alpha'). \end{aligned} \quad (11)$$

Это обычное дифференциальное уравнение для (ξ' / α') , рассматриваемой как функция ξ' , и его различные решения, после того как они найдены, различаются значениями параметров α' . Матричные элементы в схеме (α) любой динамической переменной $f(\xi_r, \eta_r)$ легко получаются из формулы

$$f(\xi_r, \eta_r)(\alpha' \alpha'') = \int (\alpha' / \xi') d\xi' \cdot f\left(\xi_r, -ih \frac{\partial}{\partial \xi_r}\right)(\xi' / \alpha'').$$

Характеристические значения этого дифференциального уравнения, обозначаемые $F(\alpha')$, суть диагональные элементы диагональной матрицы, представляющей F .

Если мы выберем в качестве ξ и η обычные q и p физической системы в некоторый момент времени, а в качестве F —гамильтониан, то уравнение (11) есть в точности волновое уравнение Шредингера, и мы приходим к методу Шредингера для решения динамической задачи квантовой теории. *Собственные функции волнового уравнения Шредингера—это в точности функции преобразования (или элементы матрицы преобразования, обозначившиеся прежде через b), которые позволяют перейти от (q) -схемы матриц к схеме, в которой гамильтониан—диагональная матрица.*

Для систем с гамильтонианом, явно зависящим от времени, вообще говоря нет такого представления, в котором H будет диагональной матрицей, поскольку не существует набора постоянных интегрирования, не зависящих явно от времени. Для таких случаев следует найти волновое уравнение, более общее, чем уравнение (11). Покажем сначала, что если $q_{r\tau}$ обозначает значение каждого q_r в момент времени $t = \tau$ и если α — набор постоянных интегрирования, которые могут быть выражены функциями q , p и t в произвольный момент t и не включают параметра τ , то

$$H(q'_r\alpha') = ih \frac{\partial}{\partial \tau} (q'_r/\alpha').$$

Это условие, которому должны удовлетворять α , таково, что

$$\frac{df}{d\tau}(\alpha'\alpha'') = \frac{\partial}{\partial \tau} [f(\alpha'\alpha'')],$$

где f — любая функция p_r и q_r . Далее, если f не зависит явно от τ , должно быть $ih \, df/d\tau = fH_\tau - H_\tau f$, где H_τ обозначает гамильтониан в момент времени τ . Тогда

$$\begin{aligned} (fH_\tau - H_\tau f)(q'_r\alpha') &= ih \frac{df}{d\tau}(q'_r\alpha') = \\ &= ih \int (q'_r/\alpha'') d\alpha'' \cdot \frac{df}{d\tau}(\alpha''\alpha') = \\ &= ih \frac{\partial}{\partial \tau} \int (q'_r/\alpha'') d\alpha'' \cdot f(\alpha''\alpha') - ih \int \frac{\partial}{\partial \tau} (q'_r/\alpha'') \cdot d\alpha'' \cdot f(\alpha''\alpha') = \\ &= ih \frac{\partial}{\partial \tau} \int f(q'_r q''_r) dq''_r \cdot (q''_r/\alpha') - ih \int \frac{\partial}{\partial \tau} (q'_r/\alpha'') \cdot d\alpha'' \cdot f(\alpha''\alpha') = \\ &= ih \int f(q'_r q''_r) dq''_r \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} (q''_r/\alpha') - ih \int \frac{\partial}{\partial \tau} (q'_r/\alpha'') \cdot d\alpha'' \cdot f(\alpha''\alpha'), \end{aligned}$$

поскольку если f — функция p_τ и q_τ , не зависящая явно от τ , то $f(q'_r q''_r)$ должна быть независима от τ . С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} (fH_\tau - H_\tau f)(q'_r\alpha') &= \\ &= \int f(q'_r q''_r) dq''_r \cdot H_\tau(q'_r\alpha') - \int H_\tau(q'_r\alpha'') d\alpha'' \cdot f(\alpha''\alpha'). \end{aligned}$$

Сравнивая эти два выражения для $(fH_\tau - H_\tau f)(q'_r\alpha')$, мы видим, что, так как они выполнены для любой функции f , то должно быть $H_\tau(q'_r\alpha') = ih \partial(q'_r/\alpha')/\partial \tau$.

Если теперь напомним t вместо τ и q — вместо q_τ , то получим

$$H(q'\alpha') = ih \partial(q'/\alpha')/\partial t,$$

что можно сравнить с ранее полученной формулой

$$p_r(q', \alpha') = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_r'}(q'/\alpha').$$

Итак, имеем

$$H\left(q_r, -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_r}\right)(q'/\alpha') = H(q_r, p_r)(q'/\alpha') = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(q'/\alpha'), \quad (12)$$

что является уравнением Шредингера в случае гамильтонианов, явно зависящих от времени.

Уравнение контактных преобразований от набора канонических переменных η_r, ξ_r к другому набору α_r, β_r в классической теории может быть представлено в простой форме

$$\eta_r = \partial S / \partial \xi_r, \quad \beta_r = \partial S / \partial \alpha_r, \quad (13)$$

где S может быть любой функцией ξ и α . Йордан¹⁾ показал, что уравнения преобразований в квантовой теории тоже можно записать в этой форме, если S может быть записана в виде

$$S = \sum f(\xi_r) g(\alpha_r),$$

т. е. все ξ в произведениях, встречающихся в S , должны быть записаны впереди всех α . (Имеется в виду, что этот же порядок должен сохраняться, когда проводится частное дифференцирование.) Этот результат легко следует из излагаемой нами теории. Действительно,

$$\begin{aligned} f(\xi_r) g(\alpha_r) (\xi'/\alpha') &= \\ &= \int f(\xi_r) (\xi' \xi'') d\xi'' (\xi''/\alpha'') \cdot g(\alpha_r) (\alpha'' \alpha') = \\ &= \iint f(\xi_r) \delta(\xi' - \xi'') d\xi'' (\xi''/\alpha'') \cdot g(\alpha_r) \delta(\alpha'' - \alpha') = \\ &= f(\xi_r) g(\alpha_r) \cdot (\xi'/\alpha'), \end{aligned}$$

и потому

$$\sum f(\xi_r) g(\alpha_r) (\xi'/\alpha') = \sum f(\xi_r) g(\alpha_r) \cdot (\xi'/\alpha') \quad (14)$$

для любых наборов функций $f(\xi_r)$ и $g(\alpha_r)$. Положим

$$(\xi'/\alpha') = \exp iS/\hbar,$$

и пусть S записана в форме $\sum f(\xi) g(\alpha)$. Тогда имеем вследствие (14)

$$\eta_r (\xi'/\alpha') = i\hbar \frac{\partial}{\partial \xi_r'} (\xi'/\alpha') = \frac{\partial S(\xi', \alpha')}{\partial \xi_r'} (\xi'/\alpha') = \frac{\partial S(\xi, \alpha)}{\partial \xi_r} (\xi'/\alpha'),$$

если $\partial S(\xi, \alpha) / \partial \xi_r$ тоже записана в форме $\sum f(\xi) g(\alpha)$. Так

¹⁾ Jordan // Zs Phys.— 1926.— Bd 38.— S. 513.

же можно показать, что $\beta_r(\xi'\alpha') = \frac{\partial S(\xi, \alpha)}{\partial \alpha_r}(\xi'\alpha')$. Эти уравнения суть в точности уравнения (13), записанные как уравнения для матричных элементов.

§ 6. Физическая интерпретация матриц

Для того чтобы получать физические результаты из матричной теории, следует сделать единственное предположение, что диагональные элементы матрицы, строки и столбцы которой отличаются значениями, например, ξ , представляющей постоянную интегрирования, скажем g , динамической системы, определяют средние значения функции $g(\xi_r, \eta_r)$ по всему η -пространству при каждом заданном значении всех ξ , точно так же, как это заведомо будет в предельном случае больших квантовых чисел. Поэтому, если

$$g(\xi'\xi'') = g(\xi') \cdot \delta(\xi' - \xi''),$$

когда ξ'' почти равны ξ' , мы примем, что $g(\xi')$ есть среднее значение g по всему η -пространству при $\xi_r = \xi'_r$. В случае, если диагональные элементы матрицы g конечны еще до выделения фактора $\delta(\xi' - \xi'')$, делается соответственно предположение, что диагональный элемент $g(\xi'\xi')$ равен $(2\pi\hbar)^{-1}$, умноженному на интеграл от $g(\xi_r, \eta_r)$ по всему η -пространству при $\xi_r = \xi'_r$.

Это предположение позволяет определить так же и η -среднее любой функции от g , и далее, если g_1, g_2, \dots, g_n — набор g , коммутирующих друг с другом и являющихся независимыми функциями ξ и η , то мы можем определить η -среднее любой функции этих g . (Величины g обязаны коммутировать, так как если они не коммутируют, то мы обнаружим, что η -среднее от $g_1 g_2$ не равно среднему от $g_2 g_1$ и не будем знать, как физически интерпретировать эти средние.) Кажется, такая информация — это все, на что мы можем надеяться, когда рассматриваем g как функции η при заданных числовых значениях ξ .

Итог всей этой информации будет получен, если мы определим ту долю η -пространства (или полный объем η -пространства, когда эта доля обращается в нуль), в которой каждое из g лежит между двумя любыми заданными числовыми значениями, т. е. долю, для которой, например, $g'_r < g_r < g''_r$. Чтобы этого достичь, нам нужно найти матрицу, которая представляет

$$\delta(g_1 - g'_1) \delta(g_2 - g'_2) \dots \delta(g_n - g'_n) = \delta(g - g').$$

Последнее обозначение введено для краткости. Если мы теперь проинтегрируем эту матрицу по параметрам g' , то результат

$$\int_{g'}^{g''} \delta(g - g') dg'$$

будет матрицей, представляющей такую функцию всех g , которая равна единице, если $g'_r < g_r < g''_r$, и нулю, если эти условия не выполнены. Диагональные элементы этой матрицы дают тогда η -среднее этой функции, равное в точности доле всего η -пространства, в которой $g'_r < g_r < g''_r$ (или еще они могут давать интеграл этой функции по всему η -пространству, что будет полным объемом η -пространства, для которого $g'_r < g_r < g''_r$).

Матрица $\delta(g - g')$ должна удовлетворять условиям¹⁾:

$$(g_r - g'_r) \delta(g - g') = \delta(g - g') (g_r - g'_r) = 0$$

для любого r и

$$\int \delta(g - g') dg' = 1.$$

Легко проверить, что матрица с элементами

$$\delta(g - g') (\xi' \xi'') = (\xi' / g') (g' / \xi'')$$

удовлетворяет этим условиям. Последнее из условий очевидно выполнено вследствие свойств ортогональности и нормировки функций преобразования (ξ' / g') и (g' / ξ'') , а для того, чтобы доказать остальные, заметим, что

$$\begin{aligned} g_r \delta(g - g') (\xi' \xi'') &= \int g_r (\xi' \xi''') d\xi''' \cdot (\xi''' / g') (g' / \xi'') = \\ &= g_r (\xi' g') (g' / \xi'') = g_r (\xi' / g') (g' / \xi'') = g_r \delta(g - g') (\xi' \xi''), \end{aligned}$$

и так же

$$\delta(g - g') g_r (\xi' \xi'') = g_r \delta(g - g') (\xi' \xi'').$$

Объем η -пространства, в котором g лежат между данными числовыми значениями, когда $\xi_r = \xi'_r$, дается теперь

$$\text{интегралом } \int_{g'}^{g''} (\xi' / g') dg' (g' / \xi'').$$

Сразу видно, что этот объем не обращается в нуль, только если интервал интегрирования по каждому из g_r

¹⁾ Если g' входит в формулу как матрица, то это означает диагональную матрицу $g'_r (\xi' \xi'') = g'_r \delta(\xi' - \xi'')$, представляющую с-число g'_r .

включает характеристическое значение этого g_r (т. е. то значение, которое появляется в качестве диагонального элемента матрицы, представляющей g_r в (g) -представлении), поскольку иначе функции преобразования (ξ'/g') и (g'/ξ') исчезали бы на всем интервале интегрирования. Это показывает, что характеристические значения любой постоянной интегрирования g —это те значения (квантованные или неквантованные), которые это g -число может действительно принимать. (В частности, собственные значения H —это энергетические уровни системы.) Симметрия между ξ' и g' в (ξ') -диагональном элементе (а именно, в (ξ'/g') (g'/ξ')) матрицы $\delta(g-g')$ позволяет сформулировать обратную теорему квантовой динамики, применимую лишь тогда, когда функции преобразования (ξ'/g') и (g'/ξ') суть непрерывные функции от ξ'_n и g'_r (откуда следует, что собственные значения ξ_r и g_r могут принимать значения в непрерывном интервале). Теорема состоит в следующем: объем η -пространства, для которого $\xi_r = \xi'_r$ и $g'_r < g_r < g'_r + \varepsilon$, равен объему пространства переменных, канонически сопряженных g , для которого $g_r = g'_r$ и $\xi'_r < \xi_r < \xi'_r + \varepsilon_r$, где ε_r —малые положительные числа. Каждый из этих объемов равен $(\xi'/g')(g'/\xi')\varepsilon$, где ε —произведение всех ε_r .

§ 7. Сравнение с прежними методами

Мы покажем теперь, что настоящий метод получения физических результатов из матричной теории согласуется с прежними предположениями о том, что квадрат амплитуды волновой функции в некоторых случаях определяет вероятность. Рассмотрим динамическую систему, которая, будучи невозмущенной, имеет гамильтониан, не зависящий от времени явно, и к которой приложено возмущение, приводящее в гамильтониане к дополнительному члену, явно зависящему от времени. Чтобы найти вероятности перехода, вызванного возмущением, в соответствии с прежним методом следует сперва получить собственные функции, скажем $\psi_0(\alpha')$, для невозмущенной системы (α —постоянные интегрирования невозмущенной системы), а потом собственные функции, скажем $\psi_t(\alpha')$, удовлетворяющие волновому уравнению возмущенной системы и имеющие начальные значения $\psi_0(\alpha')$. После этого следует разложить ψ_t по ψ_0 ,

$$\psi_t(\alpha') = \int \psi_0(\alpha'') d\alpha'' c(\alpha''\alpha'), \quad (15)$$

так, чтобы коэффициенты $c(\alpha''\alpha')$ зависели от времени. Затем мы принимаем, что $|c(\alpha''\alpha')|^2 d\alpha''$ есть вероятность того, что атом, первоначально находившийся в состоянии (α') , переходит к моменту времени t в состояние, в котором каждое из α_r лежит между α_r'' и $\alpha_r'' + d\alpha_r''$.

Чтобы определить эту вероятность с помощью общего метода настоящей статьи, следует найти функции преобразования (α_t'/α_0') и (α_t'/α_t') , связывающие значения α_t переменных α (предполагается, что они зависят от p и q и не включают времени явно) в момент времени t с их начальными значениями α_0 , причем и α_t , и α_0 — постоянные интегрирования возмущенной системы, если мы рассматриваем t как фиксированный момент времени. Интегрирующая нас вероятность есть тогда

$$(\alpha_0'/\alpha_t') d\alpha_t' (\alpha_t'/\alpha_0') = |(\alpha_t'/\alpha_0')|^2 d\alpha_t',$$

если (α_0'/α_t') и (α_t'/α_0') комплексно сопряжены, как то должно быть, если оба матричных представления, (α_t) и (α_0) , удовлетворяют условию (iv) из § 3. Если через q_t обозначить значение каждой координаты q в момент времени t , то

$$(q_t'/\alpha_0') = \int (q_t'/\alpha_t') d\alpha_t' (\alpha_t'/\alpha_0'). \quad (15')$$

Здесь (q_t'/α_0') — собственная функция, удовлетворяющая возмущенному волновому уравнению (вида (12)), а (q_t'/α_t') , которое зависит лишь от аналитического соотношения, связывающего α с p и q , — такая же функция от q_t' и α_t' , как (q_0'/α_0') — от q_0' (начальных значений q) и α_0' , и есть, следовательно, собственная функция невозмущенной системы, написанная в переменных q_t' и α_t' . Уравнение (15'), следовательно, это то же, что и уравнение (15), и функции преобразования (α_t'/α_0') суть коэффициенты в уравнении (15) (которые на самом деле надо бы писать как $c(\alpha_t''\alpha_0')$). Значит, настоящий общий метод дает те же результаты, что и прежние предположения.

Рассмотрим теперь случай столкновения, скажем, электрона с атомной системой. В той трактовке этой задачи, которую предлагает Борн, мы ищем решение уравнения Шредингера, состоящее из падающих плоских волн, представляющих приближающийся электрон, и волн, рассеянных атомной системой. Предполагаем затем, что квадрат амплитуды волны, рассеянной в каком-либо направлении, определяет вероятность того, что электрон рассеялся в этом направлении, причем его энергия задается частотой этой волны.

Чтобы определить эту вероятность излагаемым методом, следует найти функцию преобразования (p'_F/p'_i) , соединяющую конечные компоненты импульса электрона p_F с его начальными компонентами p_i . Тогда существует вероятность $(p'_i/p'_F) dp'_F (p'_F/p'_i) = |(p'_F/p'_i)|^2 dp'_F$ того, что электрон будет рассеян в состояние с импульсом, лежащим в интервале dp'_F . Если координаты электрона в момент времени t суть x_t ¹⁾, то

$$(x'_i/p'_i) = \int (x'_i/p'_F) dp'_F (p'_F/p'_i). \quad (16)$$

Здесь функция преобразования (x'_i/p'_i) есть решение уравнения Шредингера, относящееся к случаю входящего электрона с импульсом p'_i , т. е. в точности волновая функция в теории Борна. Функция (x'_i/p'_F) , напротив, представляет расходящиеся волны, отвечающие электронам с импульсами p'_F (а также и сходящиеся волны, которые мы не рассматриваем). Уравнение (16), таким образом, описывает разложение расходящихся волн, содержащихся в собственной функции (x'_i/p'_i) — по их различным компонентам, так что амплитуды отдельных компонент суть $|(p'_F/p'_i)|$. Таким образом, настоящий метод согласуется с теорией Борна.

Если посмотреть на эти задачи с матричной точки зрения, то видим, что динамические переменные должны одинаково хорошо представляться матрицами, строки и столбцы которых относятся к начальным значениям переменных действия (α_0 или p_i в двух случаях) или к их конечным значениям (α_t или p_F), и коэффициенты, позволяющие переходить от одного набора матриц к другому, — это те самые величины, которые позволяют определить вероятности перехода.

В заключение можно отметить, что настоящая теория подсказывает такой взгляд на квантовые явления, который несколько отличен от обычного. Мы можем предположить, что начальное состояние системы однозначно определяет состояние системы во все последующие моменты времени. Если, однако, мы описываем состояние системы в произвольный момент времени заданием числовых зна-

¹⁾ Разумеется, имеется в виду, что множество q -чисел x_t включает координаты атомной системы (которые явно не упоминаются) в дополнение к координатам x_t падающего электрона. Точно так же p_i и p_F должны включать переменные, фиксирующие стационарные состояния атомной системы.

чений координат и импульсов, то в действительности мы не можем установить однозначно соответствия между начальными значениями этих координат и импульсов и их значениями в последующие моменты времени. Тем не менее, можно получить достаточно обширные сведения (типа средних значений) о числовых значениях в последующее время, рассматриваемых как функции начальных значений. Понятие вероятности отнюдь не входит в окончательное описание механических процессов. Только если некоторая заданная информация уже включает вероятность (например, утверждается, что все точки η -пространства равновероятны при представлении этой системы), можно вывести результаты, включающие вероятности.

4. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ИСПУСКАНИЯ И ПОГЛОЩЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ¹⁾

Proceedings of the Royal Society
A vol. 114(1927), pp. 243—265

THE QUANTUM THEORY OF THE EMISSION AND ABSORPTION OF RADIATION

By P.A.M. DIRAC, St. John's College, Cambridge
and Institute for Theoretical Physics, Copenhagen

(Communicated by N. Bohr, For. M.R.S.— Received February 2, 1927)

§ 1. Введение и краткое содержание

Новая квантовая теория, основанная на предположении, что динамические переменные не удовлетворяют коммутативному закону умножения, развилась к настоящему времени достаточно, для того чтобы образовать довольно полную теорию динамики. Можно исследовать математически задачу о динамической системе из некоторого числа частиц с действующими между ними мгновенными силами, при условии, что она описывается функцией Гамильтона, и можно также физически интерпретировать математику с помощью вполне определенного общего метода. С другой стороны, вряд ли что-либо было сделано до настоящего времени в квантовой электродинамике. Вопросы корректного описания системы, в которой силы распространяются не мгновенно, а со скоростью света, создания электромагнитного поля движущимся электроном и обратного действия этого поля на электрон даже и не затрагивались. К тому же имеется серьезная трудность в том, как согласовать теорию со всеми требованиями специального принципа относительности, ведь теперь уже нельзя будет использовать функцию Гамильтона. Эта релятивистская проблема, конечно, связана с предыдущими, и будет невозможно полностью ответить ни на один из этих вопросов, не дав одновременно ответа на все. Однако оказывается возможным построить довольно удовлетворительную теорию испускания излучения и обратного влияния поля

¹⁾ Перевод с английского А. Б. Кожевникова.

на излучающую систему на основе кинематики и динамики, которые не являются строго релятивистскими. Это и будет основной задачей настоящей статьи. Теория является нерелятивистской только потому, что время везде считается c -числом вместо того, чтобы рассматриваться симметрично с пространственными координатами. Релятивистское изменение массы со скоростью учитывается без каких-либо трудностей.

Идеи, лежащие в основе теории, очень просты. Рассмотрим атом, взаимодействующий с полем излучения, которое мы, для определенности, будем считать заключенным в ограниченном объеме и, следовательно, имеющим лишь дискретное множество степеней свободы. Разложив излучение на фурье-компоненты, мы можем считать энергию и фазу каждой компоненты динамическими переменными, описывающими поле излучения. Так, если E_r — энергия r -й компоненты, а θ_r — соответствующая фаза (определенная как время, прошедшее с момента, когда волна имела стандартную фазу), то мы можем предположить, что каждые E_r и θ_r образуют пару канонически сопряженных переменных. При отсутствии взаимодействия между полем и атомом вся система будет описываться гамильтонианом

$$H = \sum_r E_r + H_0, \quad (1)$$

совпадающим с полной энергией, где H_0 — гамильтониан атома, взятого отдельно, а переменные E_r и θ_r естественно удовлетворяют каноническим уравнениям движения:

$$\dot{E}_r = -\frac{\partial H}{\partial \theta_r} = 0, \quad \dot{\theta}_r = \frac{\partial H}{\partial E_r} = 1.$$

Если между полем и атомом есть взаимодействие, то в классической теории его можно было бы учесть, добавляя к гамильтониану (1) член взаимодействия, который был бы функцией переменных атома и переменных E_r и θ_r , описывающих поле. Этот член взаимодействия дал бы влияние излучения на атом, а также обратное действие атома на поле излучения.

Для того чтобы аналогичный метод можно было бы использовать в квантовой теории, необходимо принять, что переменные E_r , θ_r , так же, как и остальные динамические переменные задачи, суть q -числа, удовлетворяющие стандартным квантовым условиям

$$\theta_r E_r - E_r \theta_r = ih \text{ и т. д.,}$$

где h есть обычная постоянная Планка, деленная на 2π . Это допущение сразу придает излучению свойства световых квантов¹⁾. Так, если ν_r — частота r -й компоненты, то $2\pi\nu_r\theta_r$ — угловая переменная, так что канонически сопряженная ей $E_r/2\pi\nu_r$ сможет принимать только дискретный набор значений, отличающихся на величины, кратные h , что означает, что E_r может меняться только на целые кратные кванта $(2\pi h)\nu_r$. Если мы теперь добавим в гамильтониан (1) член взаимодействия (взяв его из классической теории), то задачу можно решить в соответствии с правилами квантовой механики и можно ожидать правильных результатов для действия излучения и атома друг на друга. Будет показано, что, действительно, получаются верные законы для поглощения и испускания излучения и правильные значения коэффициентов Эйнштейна A и B . В предыдущей теории автора²⁾, где энергии и фазы компонент излучения были c -числами, удалось получить только коэффициенты B , и обратное действие атома на излучение не могло быть принято во внимание.

Также будет показано, что гамильтониану, описывающему взаимодействие атома и электромагнитных волн, можно придать форму, идентичную форме гамильтониана задачи взаимодействия атома с ансамблем частиц, движущихся со скоростью света и удовлетворяющих статистике Эйнштейна — Бозе, если только мы подходящим образом выберем для частиц энергию взаимодействия с атомом. Число частиц с некоторыми определенными направлением движения и энергией, которое можно использовать как динамическую переменную в гамильтониане для частиц, равно числу квантов энергии в соответствующей волне в волновом гамильтониане. Таким образом, имеется совершенная гармония между волновым описанием взаимодействия и его описанием с помощью квантов света. Мы действительно построим теорию с точки зрения квантов света и покажем, что гамильтониан естественно преобразуется к форме, похожей на гамильтониан для волн.

Математическое развитие теории стало возможным благодаря предложенной автором общей теории преобразований

¹⁾ Похожие предположения были использованы Борном и Иорданом (*Zs. Phys.*—1925.—Vd 34.—S. 886) для переноса классической формулы излучения диполя в квантовую теорию и Борном, Гейзенбергом и Иорданом (*Zs. Phys.*—1926.—Vd 35.—S. 606) для вычисления флуктуирующей энергии в поле излучения черного тела.

²⁾ *Proc. Roy. Soc. A.*—1926.—V. 112.—P. 661, § 5. (Статья 2 этого сборника.—*Red.*) Эта работа далее цитируется как *loc. cit.*, I.

квантовых матриц¹⁾. Поскольку время мы считаем δ -числом, то нам можно пользоваться понятием значения любой динамической переменной в любой момент времени. Это значение является q -числом, которое можно представить обобщенной «матрицей», соответствующей различным матричным схемам, некоторые из которых могут иметь непрерывное множество рядов и столбцов и требовать присутствия в матричных элементах определенного рода бесконечностей (типа δ -функций)²⁾. Можно найти матричную схему, в которой любой желаемый набор коммутирующих между собой констант интегрирования динамической системы представлен диагональными матрицами или в которой набор коммутирующих между собой динамических переменных представлен матрицами, диагональными в определенный момент времени³⁾. Значения диагональных элементов диагональной матрицы, представляющей некое q -число — это собственные значения этого q -числа. Декартова координата или импульс обычно имеют собственные значения, простирающиеся от $-\infty$ до $+\infty$, тогда как переменная действия имеет только дискретный набор собственных значений. (Мы возьмем за правило употреблять нештрихованные буквы для обозначения динамических переменных, или q -чисел, а те же буквы с одним или несколькими штрихами — для обозначения их собственных значений. Функции преобразования или собственные функции — это функции собственных значений, а не самих q -чисел, поэтому их нужно всегда записывать на языке штрихованных переменных.)

Если $f(\xi, \eta)$ — произвольная функция канонических переменных ξ_k, η_k , то матрицу, представляющую f в любой момент времени t , в матричной схеме, в которой ξ_k диагональны в момент t , можно выписать без труда, поскольку известны матрицы, представляющие ξ_k и η_k в момент t ,

¹⁾ Proc. Roy. Soc. A.— 1927.— V. 113.— P. 621. (Статья 3 этого сборника.— *Ред.*) Эта работа далее цитируется как loc. cit., II. По сути эквивалентную теорию получил независимо Йордан (Zs. Phys.— 1927.— Bd 40.— S. 809). См. также F. London // Zs. Phys.— 1926.— Bd 40.— S. 193.

²⁾ Loc. cit., II, § 2.

³⁾ Можно получить матричную схему, в которой система коммутирующих переменных в любой момент времени представлена диагональными матрицами, если пожертвовать условием, что матрицы должны удовлетворять уравнениям движения. Функция преобразования от такой системы к той, в которой уравнения движения выполняются, зависит явно от времени. См. loc. cit., II.— P. 628.

а именно

$$\begin{aligned} \xi_k (\xi' \xi'') &= \xi'_k \delta (\xi' - \xi''), \\ \eta_k (\xi' \xi'') &= -i\hbar \delta (\xi'_1 - \xi''_1) \dots \\ &\dots \delta (\xi'_{k-1} - \xi''_{k-1}) \delta' (\xi'_k - \xi''_k) \delta (\xi'_{k+1} - \xi''_{k+1}) \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Таким образом, если гамильтониан H задан как функция ξ_k и η_k , то можно сразу написать матрицу $H (\xi' \xi'')$. Мы можем потом найти функцию преобразования; скажем (ξ' / α') , которая приводит к матричной схеме (α) , в которой гамильтониан описывается диагональной матрицей; (ξ' / α') должна удовлетворять интегральному уравнению

$$\int H (\xi' \xi'') d\xi'' (\xi'' / \alpha') = W (\alpha') (\xi' / \alpha'), \quad (3)$$

собственные значения $W (\alpha')$ которого суть энергетические уровни. Это уравнение и есть волновое уравнение Шредингера для собственной функции (ξ' / α') . Оно превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение, если H — простая алгебраическая функция ξ_k и η_k (вследствие специальных выражений (2) для матриц, представляющих ξ_k и η_k). Уравнение (3) можно записать в более общей форме

$$\int H (\xi' \xi'') d\xi'' (\xi'' / \alpha') = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\xi' / \alpha'), \quad (3')$$

в которой оно может применяться к системам, гамильтониан которых включает время явно.

Бывают алгебраические системы с гамильтонианом H , который нельзя выразить алгебраической функцией какого бы то ни было набора канонических переменных, но который, тем не менее, представим в виде матрицы $H (\xi' \xi'')$. Такую задачу тоже можно решить настоящим методом и получить уровни энергии и собственные функции, так как в этом случае все еще можно воспользоваться уравнением (3). Мы увидим, что гамильтониан, описывающий взаимодействие световых квантов с атомной системой, принадлежит к этому, более общему, типу, так что взаимодействие можно исследовать математически, хотя и нельзя говорить о потенциальной энергии взаимодействия в обычном понимании этого слова.

Нужно отметить, что существует различие между волнами света и волнами де Бройля или Шредингера, связанными со световыми квантами. Во-первых, световая волна всегда вещественна, тогда как волна де Бройля, отвечающая движущемуся в определенном направлении кванту света, обязательно содержит мнимую экспоненту. Более

существенное отличие связано с тем, что интенсивности волн нужно интерпретировать по-разному. Число световых квантов в единице объема, связанных с монохроматической волной света, равно энергии волны в единице объема, деленной на энергию одного кванта $(2\pi\hbar)\nu$. С другой стороны, монохроматическую волну де Бройля амплитуды a (умноженной на мнимую экспоненту) нужно для всех частот интерпретировать как представляющую a^2 квантов света на единицу объема. Это частный случай общего правила интерпретации матричного анализа¹⁾, согласно которому если (ξ'/α') [или $\psi_{\alpha'}(\xi_k)$] — собственная функция состояния α' атомной системы (или просто частицы) в переменных ξ_k , то, в предположении, что все фазы равновероятны, $|\psi_{\alpha'}(\xi_k)|^2$ есть вероятность того, что каждая ξ_k имеет значение ξ_k (в случае непрерывного спектра собственных значений ξ_k величина $|\psi_{\alpha'}(\xi_k)|^2 d\xi_1 d\xi_2 \dots$ есть вероятность того, что каждая ξ_k лежит между ξ_k и $\xi_k + d\xi_k$). Волна, интенсивность которой нужно интерпретировать с помощью первого из этих двух способов, появляется в теории только тогда, когда мы имеем дело с ансамблем ассоциированных частиц, подчиняющихся статистике Эйнштейна — Бозе. Поэтому для электронов такой волны не существует.

§ 2. Возмущение ансамбля независимых систем

Рассмотрим переходы в атомной системе, вызванные произвольным возмущением. Метод, который мы используем, это недавно предложенный автором²⁾, который простым путем ведет к уравнениям, определяющим вероятность нахождения системы в любой момент времени в любом стационарном состоянии невозмущенной системы³⁾. Это, естественно, сразу определяет вероятное число систем, находящихся в данном состоянии в данный момент времени в том случае, когда мы имеем дело с ансамблем независимых друг от друга и одинаковым образом возмущенных систем. Цель данного параграфа — показать, что уравнения для скорости изменения этих вероятных чисел

¹⁾ Loc. cit., II, § 6, 7.

²⁾ Loc. cit., I.

³⁾ Теория недавно расширена Борном (Zs. Phys.—1926.—Vd 40.—S. 167) и учитывает также адиабатические изменения стационарных состояний, которые могут быть вызваны как возмущением, так и переходами. В настоящей статье это расширение теории не используется.

могут быть простым образом приведены к гамильтоновой форме, а это уже позволит развить теорию дальше.

Пусть H_0 — гамильтониан невозмущенной системы, а V — энергия возмущения, которая может быть произвольной функцией динамических переменных и может зависеть или не зависеть явно от времени. Тогда гамильтониан возмущенной системы запишется как $H = H_0 + V$. Собственные функции возмущенной системы должны удовлетворять волновому уравнению

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = (H_0 + V) \psi,$$

где $(H_0 + V)$ — оператор. Если $\psi = \sum_r a_r \psi_r$ — решение этого уравнения, удовлетворяющее нужным начальным условиям (здесь ψ_r — собственные функции невозмущенной системы, каждая из которых описывает стационарное состояние, обозначенное индексом r , а a_r — функции только времени), то $|a_r|^2$ в любой момент времени является вероятностью нахождения системы в состоянии r . Все a_r должны быть нормированы в начальном состоянии, тогда они будут оставаться нормированными и позже. Теория будет непосредственно применима к ансамблю из N одинаковых независимых систем, если мы домножим каждое из a_r на $N^{1/2}$, чтобы сделать $\sum_r |a_r|^2 = N$. Тогда $|a_r|^2$ будет вероятным числом систем, находящихся в состоянии r .

Скорость изменения a_r определяет уравнение ¹⁾

$$iha_r = \sum_s V_{rs} a_s, \quad (4)$$

где V_{rs} — элементы матрицы, представляющей V . Комплексно-сопряженным уравнением будет

$$-iha_r^* = \sum_s V_{rs}^* a_s^* = \sum_s a_s^* V_{sr}. \quad (4')$$

Если рассматривать a_r и $ih a_r^*$ как канонически сопряженные переменные, то уравнения (4) и (4') примут гамильтонову форму с функцией Гамильтона $F_1 = \sum_{rs} a_r^* V_{rs} a_s$, а именно

$$\frac{da_r}{dt} = \frac{1}{ih} \frac{\partial F_1}{\partial a_r^*}, \quad ih \frac{da_r^*}{dt} = - \frac{\partial F_1}{\partial a_r}.$$

¹⁾ Loc. cit., I, уравнение (25).

С помощью контактного преобразования мы можем перейти к каноническим переменным N_r и φ_r :

$$a_r = N_r^{1/2} e^{-i\varphi_r/\hbar}, \quad a_r^* = N_r^{1/2} e^{i\varphi_r/\hbar}.$$

Это преобразование делает новые переменные N_r и φ_r вещественными; N_r , равное $a_r a_r^* = |a_r|^2$, — это вероятное число систем в состоянии r , а φ_r/\hbar является фазой собственной функции, представляющей эти системы. Гамильтониан F_1 теперь запишется в виде

$$F_1 = \sum_{rs} V_{rs} N_r^{1/2} N_s^{1/2} e^{i(\varphi_r - \varphi_s)/\hbar},$$

и уравнения, определяющие скорость, с которой происходят переходы, будут иметь каноническую форму:

$$\dot{N}_r = -\frac{\partial F_1}{\partial \varphi_r}, \quad \dot{\varphi}_r = \frac{\partial F_1}{\partial N_r}.$$

Более удобный способ приведения уравнений переходов к гамильтоновой форме можно получить с помощью величин

$$b_r = a_r e^{-iW_r t/\hbar}, \quad b_r^* = a_r^* e^{iW_r t/\hbar},$$

где W_r — энергия состояния r . Тогда $|b_r|^2$ равно $|a_r|^2$ и тоже дает вероятное число систем в состоянии r . Для \dot{b}_r с помощью (4) получим

$$i\hbar \dot{b}_r = W_r b_r + i\hbar \dot{a}_r e^{-iW_r t/\hbar} = W_r b_r + \sum_s V_{rs} b_s e^{(W_s - W_r) t/\hbar}.$$

Если мы положим $V_{rs} = v_{rs} e^{i(W_r - W_s) t/\hbar}$, так чтобы v_{rs} было константой в случае, когда V не зависит явно от времени, то уравнение преобразуется к виду

$$i\hbar \dot{b}_r = W_r b_r + \sum_s v_{rs} b_s = \sum_s H_{rs} b_s, \quad (5)$$

где $H_{rs} = W_r \delta_{rs} + v_{rs}$ — матричный элемент полного гамильтониана $H = H_0 + V$ с отброшенным временным множителем $e^{i(W_r - W_s) t/\hbar}$, так что H_{rs} — константа, если H не содержит времени явно. Уравнение (5) имеет ту же форму, что и (4), и может быть приведено к гамильтоновой форме тем же путем.

Необходимо отметить, что уравнение (5) получается сразу, если записать уравнение Шредингера в системе переменных, определяющих стационарные состояния невозмущенной системы. Если эти переменные обозначить ξ_k и если H ($\xi^* \xi$) означает матричный элемент полного гамильтониана H в (ξ)-схеме, то уравнение Шредингера в форме

(3') запишется так:

$$i\hbar \partial \psi(\xi') / \partial t = \sum_{\xi''} H(\xi' \xi'') \psi(\xi''). \quad (6)$$

Оно отличается от предыдущего уравнения (5) только обозначениями: вместо одного индекса r для обозначения стационарных состояний используются числовые значения ξ_k переменных ξ_k , и вместо b_k используется $\psi(\xi')$. Уравнение (6), а следовательно, также и уравнение (5) могут использоваться и в случае гамильтониана более общего вида, который нельзя записать в виде алгебраической функции канонических переменных, но можно представить матрицей $H(\xi' \xi'')$ или H_{rs} .

Теперь возьмем за канонически сопряженные переменные b_r и $i\hbar b_r^*$ вместо a_r и $i\hbar a_r^*$. Уравнение (5) и комплексно сопряженное ему уравнение примут гамильтонову форму, если взять функцию Гамильтона

$$F = \sum_{rs} b_r^* H_{rs} b_s. \quad (7)$$

Так же, как и прежде, сделаем контактное преобразование

$$b_r = N_r^{1/2} e^{-i\theta_r/\hbar}, \quad b_r^* = N_r^{1/2} e^{i\theta_r/\hbar} \quad (8)$$

к новым каноническим переменным N_r, θ_r , где N_r , как и раньше, — вероятное число систем в состоянии r , а θ_r — новая фаза. Гамильтониан F теперь будет равен

$$F = \sum_{rs} H_{rs} N_r^{1/2} N_s^{1/2} e^{i(\theta_r - \theta_s)/\hbar},$$

а уравнения для скорости изменения N_r и θ_r примут каноническую форму

$$\dot{N}_r = -\frac{\partial F}{\partial \theta_r}, \quad \dot{\theta}_r = \frac{\partial F}{\partial N_r}.$$

Гамильтониан можно записать как

$$F = \sum_r W_r N_r + \sum_{rs} v_{rs} N_r^{1/2} N_s^{1/2} e^{i(\theta_r - \theta_s)/\hbar}. \quad (9)$$

Здесь первый член $\sum_r W_r N_r$ — это собственная энергия ансамбля, а второй можно считать добавочной энергией, возникшей вследствие возмущения. Если возмущения нет, то фазы θ_r растут линейно со временем, тогда как прежние фазы φ_r оставались бы в этом случае постоянными.

§ 3. Возмущение ансамбля, удовлетворяющего статистике Эйнштейна — Бозе

Согласно предыдущему параграфу, мы можем описать действие возмущения на ансамбль независимых систем с помощью канонических переменных и гамильтоновых уравнений движения. Дальнейшее, само собою напрашивающееся развитие теории состоит в том, чтобы сделать эти канонические переменные вместо s -чисел q -числами, удовлетворяющими обычным квантовым условиям, так чтобы гамильтоновы уравнения движения стали настоящими квантовыми уравнениями. Функция Гамильтона даст тогда уравнение Шредингера, которое нужно решать и интерпретировать обычным образом. Интерпретация даст не только вероятное число систем в каждом состоянии, но и вероятность любого данного распределения систем по различным состояниям; в самом деле, эта вероятность равна квадрату модуля нормированного решения волнового уравнения, которое удовлетворяет нужным начальным условиям. Мы могли бы, конечно, вычислить прямо, из элементарных соображений, вероятность любого заданного распределения, когда системы являются независимыми, коль скоро мы знаем вероятность нахождения каждой системы в любом из частных состояний. Мы нашли бы, что вероятность, вычисленная непосредственно таким способом, не совпадает с полученной из волнового уравнения, кроме частного случая, когда в ансамбле имеется только одна система. В общем случае будет показано, что волновое уравнение ведет к правильному значению вероятности заданного распределения, когда системы подчиняются статистике Эйнштейна — Бозе, а не являются независимыми.

Примем, что переменные b_r , ihb_r^* из § 2 являются каноническими q -числами, удовлетворяющими квантовым условиям

$$b_r \cdot ihb_r^* - ihb_r^* \cdot b_r = ih,$$

или

$$b_r b_r^* - b_r^* b_r = 1$$

и

$$b_r b_s - b_s b_r = 0, \quad b_r^* b_s^* - b_s^* b_r^* = 0; \quad b_r b_s^* - b_s^* b_r = 0 \quad (s \neq r).$$

Уравнения преобразования (8) теперь нужно записать в квантовой форме:

$$\left. \begin{aligned} b_r &= (N_r + 1)^{1/2} e^{-i\theta_r/h} = e^{-i\theta_r/h} N_r^{1/2}, \\ b_r^* &= N_r^{1/2} e^{i\theta_r/h} = e^{i\theta_r/h} (N_r + 1)^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

для того чтобы N_r, θ_r тоже могли быть каноническими переменными. Эти уравнения показывают, что N_r может иметь только целые неотрицательные собственные значения¹⁾, и это подтверждает наше предположение, что переменные являются q -числами в том виде, как мы их выбрали. Числа систем в различных состояниях представляют собой теперь обычные квантовые числа.

Гамильтониан (7) запишется тогда как

$$F = \sum_{rs} b_r^* H_{rs} b_s = \sum_{rs} N_r^{1/2} e^{i\theta_r/\hbar} H_{rs} (N_s + 1)^{1/2} e^{-i\theta_s/\hbar} = \\ = \sum_{rs} H_{rs} N_r^{1/2} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{1/2} e^{i(\theta_r - \theta_s)/\hbar}, \quad (11)$$

где H_{rs} остались c -числами. Мы можем записать этот гамильтониан F в форме, соответствующей (9),

$$F = \sum_r W_r N_r + \sum_{rs} v_{rs} N_r^{1/2} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{1/2} e^{i(\theta_r - \theta_s)/\hbar}, \quad (11')$$

в которой он опять состоит из члена, отвечающего собственной энергии $\sum_r W_r N_r$, и члена взаимодействия.

Волновое уравнение, записанное в переменных N_r , будет следующим²⁾:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(N'_1, N'_2, N'_3, \dots) = F\psi(N'_1, N'_2, N'_3, \dots), \quad (12)$$

где F — оператор, а каждая θ_r , появляющаяся в F , интерпретируется как $i\hbar \partial/\partial N'_r$. Если мы применим оператор $e^{\pm i\theta_r/\hbar}$ к произвольной функции $f(N'_1, N'_2, \dots, N'_r, \dots)$ переменных N'_1, N'_2, \dots , то получим

$$e^{\pm i\theta_r/\hbar} f(N'_1, N'_2, \dots, N'_r, \dots) = \\ = e^{\mp \partial/\partial N'_r} f(N'_1, N'_2, \dots, N'_r, \dots) = f(N'_1, N'_2, \dots, N'_r \mp 1, \dots).$$

Используя в уравнении (12) это правило, а также выражение (11) для F , получим³⁾

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(N'_1, N'_2, N'_3, \dots) = \sum_{rs} H_{rs} N_r^{1/2} (N'_s + 1 - \delta_{rs})^{1/2} \times \\ \times \psi(N'_1, N'_2, \dots, N'_r - 1, \dots, N'_s + 1, \dots). \quad (13)$$

¹⁾ См. § 8 работы автора в Proc. Roy. Soc. A.— 1926.— V. 111.— P. 281. То, что там называется c -численными значениями, которые может принимать q -число, здесь получило более точное название — собственные значения q -числа.

²⁾ Для определенности мы считаем, что индекс r , нумерующий стационарные состояния, принимает значения 1, 2, 3, ...

³⁾ Если $s=r$, то $\psi(N'_1, N'_2, \dots, N'_r - 1, \dots, N'_s + 1, \dots)$ нужно понимать в смысле $\psi(N'_1, N'_2, \dots, N'_r, \dots)$.

Из правой части этого уравнения мы видим, что член в F , содержащий $e^{t(\theta_r - \theta_s)/\hbar}$, дает вклад только в те матричные элементы представляющей F матрицы, которые относятся к переходам с уменьшением N_r на единицу и увеличением N_s на единицу, т. е. в матричные элементы типа $F(N'_1, N'_2, \dots, N'_r, \dots, N'_s, \dots; N'_1, N'_2, \dots, N'_r - 1, \dots, N'_s + 1, \dots)$. Если мы найдем решение $\psi(N'_1, N'_2, \dots)$ уравнения (13), которое будет нормировано (т. е. для которого $\sum_{N'_1, N'_2, \dots} |\psi(N'_1, N'_2, \dots)|^2 = 1$) и будет удовлет-

ворять нужным начальным условиям, тогда $|\psi(N'_1, N'_2, \dots)|^2$ будет вероятностью такого распределения, в котором N'_1 систем в некоторый момент времени находятся в состоянии 1, N'_2 — в состоянии 2 и так далее.

Рассмотрим сначала случай, когда в ансамбле только одна система. Вероятность найти ее в состоянии q определяется собственной функцией $\psi(N'_1, N'_2, \dots)$, в которой все N' равны нулю, кроме N'_q , равного единице. Эту собственную функцию мы обозначим $\psi\{q\}$. После подстановки ее в левую часть уравнения (13) все члены суммы в правой части исчезнут, кроме члена с $r = q$, и у нас останется

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi\{q\} = \sum_s H_{qs} \psi\{s\},$$

а это как раз и есть уравнение (5), в котором $\psi\{q\}$ играет роль b_q . Таким образом, установлено, что настоящая теория эквивалентна теории, изложенной в предыдущем параграфе, в случае, когда ансамбль состоит из одной системы.

Теперь возьмем общий случай произвольного числа систем в ансамбле и предположим, что они подчиняются статистической механике Эйнштейна — Бозе. Это требует в обычном рассмотрении проблемы, чтобы принимались во внимание только такие собственные функции, которые симметричны по всем системам; этих собственных функций уже достаточно для полного квантового решения задачи¹⁾. Мы получим теперь уравнение для скорости изменения одной из этих симметричных функций и покажем, что оно идентично уравнению (13).

Пометим каждую систему индексом n , тогда гамильтонианом ансамбля будет $H_A = \sum_n H(n)$, где $H(n)$ есть H

¹⁾ Loc. cit., I, § 3.

из § 2 (равный $i\dot{I}_0 + V$), выраженный в переменных n -й системы. Стационарное состояние ансамбля определяется числами $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$, являющимися индексами стационарных состояний, в которых находятся отдельные системы. Уравнение Шредингера для ансамбля в системе переменных, определяющих стационарные состояния, будет иметь форму (6) (с H_A вместо H), и мы можем его написать в обозначениях уравнения (5) как¹⁾

$$i\hbar \dot{b}(r_1 r_2 \dots) = \sum_{s_1, s_2, \dots} H_A(r_1 r_2 \dots; s_1 s_2 \dots) b(s_1 s_2 \dots), \quad (14)$$

где $H_A(r_1 r_2 \dots; s_1 s_2 \dots)$ — общий матричный элемент H_A (с отброшенным временным множителем). Этот матричный элемент обращается в нуль, если более чем одно s_n отличается от соответствующего r_n ; он равен $H_{r_m s_m}$, когда s_m отличается от r_m , а все остальные s_n равны r_n ; и равен $\sum_n H_{r_n r_n}$, когда все s_n равны r_n . Подставив эти значения в (14), получим

$$i\hbar \dot{b}(r_1 r_2 \dots) = \sum_m \sum_{s_m \neq r_m} H_{r_m s_m} b(r_1 r_2 \dots r_{m-1} s_m r_{m+1} \dots) + \sum_n H_{r_n r_n} b(r_1 r_2 \dots). \quad (15)$$

Теперь мы должны ограничить $b(r_1 r_2 \dots)$ случаем симметричной функции переменных r_1, r_2, \dots , чтобы получить статистику Эйнштейна—Бозе. Это позволительно, ибо если функция $b(r_1 r_2 \dots)$ симметрична в какой-то момент времени, то из уравнения (15) видно, что $\dot{b}(r_1 r_2 \dots)$ тоже будет симметрична в этот момент, так что $b(r_1 r_2 \dots)$ будет все время оставаться симметричной.

Пусть N_r — число систем в состоянии r . Тогда стационарное состояние ансамбля, описываемое симметричной собственной функцией, может быть столь же полно охарактеризовано числами $N_1, N_2, \dots, N_r, \dots$, как и числами $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$, и мы можем преобразовать уравнение (15) к переменным N_1, N_2, \dots . В действительности, мы не можем положить новую собственную функцию $b(N_1, N_2, \dots)$ равной старой $b(r_1 r_2 \dots)$, но должны принять, что они отличаются числовым множителем. Это необходимо для того, чтобы они обе могли быть пра-

1) Обращаем внимание читателя на то, что здесь и ниже Дирак опускает в ряде случаев запятые, разделяющие многочисленные аргументы матричных элементов. — *Примеч. ред.*

вильно нормированы относительно соответствующих переменных. Надо учесть, что

$$\sum_{r_1, r_2, \dots} |b(r_1 r_2 \dots)|^2 = 1 = \sum_{N_1, N_2, \dots} |b(N_1, N_2, \dots)|^2,$$

и, следовательно, мы должны взять $|b(N_1, N_2, \dots)|^2$ равным сумме разных $|b(r_1 r_2 \dots)|^2$ для всех значений чисел r_1, r_2, \dots , при которых N_1 из них равны 1, N_2 равны 2 и т. д. В этой сумме будет $N!/N_1!N_2! \dots$ членов, где $N = \sum_r N_r$ — полное число систем, и все эти члены одинаковы, так как $b(r_1 r_2 \dots)$ — симметричная функция переменных r_1, r_2, \dots . Следовательно, нужно взять

$$b(N_1, N_2 \dots) = (N!/N_1!N_2! \dots)^{1/2} b(r_1 r_2 \dots).$$

После подстановки в уравнение (15) левая часть станет равной $ih(N_1!N_2! \dots / N!)^{1/2} \dot{b}(N_1, N_2, \dots)$. Член $H_{r_m s_m} b(r_1 r_2 \dots r_{m-1} s_{m-1} r_{m+1} \dots)$ в первой сумме правой части будет равен

$$[N_1!N_2! \dots (N_r - 1)! \dots (N_s + 1)! \dots / N!]^{1/2} H_{rs} b(N_1, N_2, \dots, N_r - 1, \dots, N_s + 1, \dots), \quad (16)$$

где мы написали r вместо r_m и s вместо s_m . Такие члены нужно просуммировать по всем значениям s , неравным r , а потом — по всем r , принимающим значения r_1, r_2, \dots . Таким образом, каждый член вида (16) повторяется в процессе суммирования до тех пор, пока он не встретится там N_r раз, и следовательно, его вклад в правую часть (15) составит

$$N_r [N_1!N_2! \dots (N_r - 1)! \dots (N_s + 1)! \dots / N!]^{1/2} H_{rs} \times \\ \times \dot{b}(N_1, N_2, \dots, N_r - 1, \dots, N_s + 1, \dots) = N_r^{1/2} (N_s + 1)^{1/2} \times \\ \times (N_1!N_2! \dots / N!)^{1/2} H_{rs} b(N_1, N_2, \dots, N_r - 1, \dots, N_s + 1, \dots).$$

Наконец, член $\sum_n H_{r_n r_n} b(r_1 r_2 \dots)$ запишется в виде

$$\sum_r N_r H_{rr} b(r_1 r_2 \dots) = \\ = \sum_r N_r H_{rr} (N_1!N_2! \dots / N!)^{1/2} b(N_1, N_2, \dots).$$

Итак, уравнение (15) превратится (сокращенное на множитель $(N_1!N_2! \dots / N!)$) в

$$ih \dot{b}(N_1, N_2 \dots) = \\ = \sum_{r \neq s} N_r^{1/2} (N_s + 1)^{1/2} H_{rs} b(N_1, N_2 \dots N_r - 1 \dots N_s + 1 \dots) + \\ + \sum_r N_r H_{rr} b(N_1, N_2 \dots), \quad (17)$$

что совпадает с уравнением (13) (с той лишь поправкой, что в (17) при символах N опущены штрихи, что разрешено, так как мы не требуем, чтобы N были q -числами). Таким образом, мы установили, что гамильтониан (11) описывает влияние возмущения на ансамбль, удовлетворяющий статистике Эйнштейна—Бозе.

§ 4. Обратное действие ансамбля на возмущающую систему

До сих пор мы рассматривали только возмущения, которые могут быть представлены энергией возмущения V , добавленной к гамильтониану возмущаемой системы; V было функцией только динамических переменных этой системы и, может быть, времени. Теорию можно легко распространить на случай, когда возмущение состоит во взаимодействии с возмущающей динамической системой, учитывая также и обратное влияние возмущаемой системы на возмущающую. (Различие между возмущающей и возмущаемой системами, конечно, не является подлинным, но мы будем придерживаться его для удобства.)

Итак, рассмотрим возмущающую систему, описываемую, скажем, каноническими переменными J_k, ω_k , где J_k являются первыми интегралами изолированной системы. Система взаимодействует с ансамблем возмущающих систем, не взаимодействующих друг с другом и удовлетворяющих статистике Эйнштейна—Бозе. Полный гамильтониан будет иметь вид

$$H_T = H_P(J) + \sum_n H(n),$$

где H_P —гамильтониан возмущающей системы (функция только J_k), а $H(n)$ равен собственной энергии $H_0(n)$ плюс энергия возмущения $V(n)$ n -ой системы из ансамбля. $H(n)$ —теперь функция только переменных n -ой системы ансамбля J_k и ω_k , и не включает явно время.

Уравнением Шредингера, соответствующим уравнению (14), будет

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{b}(J', r_1 r_2 \dots) = \\ = \sum_{J''} \sum_{s_1, s_2 \dots} H_T(J', r_1 r_2 \dots; J'', s_1 s_2 \dots) b(J'', s_1 s_2 \dots), \end{aligned}$$

где собственные функции b включают дополнительные переменные J_k . Матричный элемент $H_T(J', r_1 r_2 \dots; J'', s_1 s_2 \dots)$ теперь всегда постоянен. Как и раньше, он

обращается в нуль, если более чем одно s_n отличается от соответствующего r_n . Если s_m отличается от r_m , а все остальные s_n равны r_n , он сводится к $H(J'r_m; J''s_m)$, который является матричным элементом (с отброшенным временным множителем) с индексами $(J'r_m; J''s_m)$ гамильтониана $H = H_0 + V$, собственной энергии плюс энергии возмущения одной системы из ансамбля; если же все s_n равны r_n , он имеет значение $H_p(J') \delta_{J'J''} + \sum_n H(J'r_n; J''r_n)$.

Если, как и раньше, мы ограничимся только симметричными относительно переменных r_1, r_2, \dots собственными функциями, мы опять сможем перейти к переменным N_1, N_2, \dots , и это приведет, как и раньше, к результату

$$i\hbar \dot{b}(J', N'_1, N'_2, \dots) = H_p(J') b(J', N'_1, N'_2, \dots) + \sum_{J''} \sum_{r, s} N_r'^{1/2} (N'_s + 1 - \delta_{rs})^{1/2} H(J'r; J''s) \times \\ \times b(J'', N'_1, N'_2, \dots, N'_r - 1, \dots, N'_s + 1, \dots). \quad (18)$$

Это есть уравнение Шредингера, отвечающее функции Гамильтона

$$F = H_p(J) + \sum_{r, s} H_{rs} N_r'^{1/2} (N'_s + 1 - \delta_{rs})^{1/2} e^{i(\theta_r - \theta_s)/\hbar}, \quad (19)$$

в котором теперь H_{rs} — функция J_k и ω_k , причем, будучи представлен матрицей в (J) -схеме, его $(J'J'')$ -элемент равен $H(J'r; J''s)$. (Отметим, что H_{rs} коммутирует со всеми N и θ .)

Таким образом, взаимодействие возмущающей системы и ансамбля, удовлетворяющего статистике Эйнштейна — Бозе, может быть описано гамильтонианом вида (19). Мы можем привести его к форме, соответствующей (11), заметив, что матричный элемент $H(J'r; J''s)$ состоит из суммы двух частей: части, отвечающей собственной энергии H_0 , которая равна W_r , когда $J''_k = J'_k$ и $s = r$, и нулю во всех остальных случаях; и части, отвечающей энергии взаимодействия V , которую можно обозначить $v(J'r; J''s)$. Тогда мы получим

$$H_{rs} = W_r \delta_{rs} + v_{rs},$$

где v_{rs} — такая функция J_k и ω_k , которая представляется матрицей с $(J'J'')$ -элементом, равным $v(J'r; J''s)$, и (19) запишется как

$$F = H_p(J) + \sum_r W_r N_r + \sum_{r, s} v_{rs} N_r'^{1/2} (N'_s + 1 - \delta_{rs})^{1/2} e^{i(\theta_r - \theta_s)/\hbar}. \quad (20)$$

Итак, гамильтониан является суммой собственной энергии возмущающей системы $H_p(J)$, собственной энергии возмущаемых систем $\sum_r W_r N_r$ и энергии возмущения $\sum_{r,s} v_{rs} N_r^{1/2} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{1/2} e^{i(\theta_r - \theta_s)/h}$.

§ 5. Теория переходов системы из одного состояния в другое с той же энергией

Прежде чем применить результаты предыдущего параграфа к квантам света, мы обсудим решение задачи, представленной гамильтонианом типа (19). Существенная особенность задачи состоит в том, что она относится к динамической системе, которая может под влиянием энергии возмущения, не содержащей времени явно, совершать переходы из одного состояния в другое, обладающее той же энергией. Одна из задач такого типа, рассмотренная Борном¹⁾, — это задача столкновения между атомной системой и электроном. Метод Борна состоит в том, чтобы найти у волнового уравнения *периодическое* решение, которое — в той мере, в которой рассматривается зависимость от координат сталкивающегося электрона — состоит из (представляющих налетающий электрон, приближающийся к атомной системе) плоских волн, которые рассеиваются, или дифрагируют, во всех направлениях. Квадрат амплитуды волн, рассеянных в произвольном направлении с любой заданной частотой, трактуется Борном как вероятность того, что электрон рассеян в данном направлении и с соответствующей энергией.

Кажется, что этот метод невозможно простым образом распространить на общую задачу о системе, совершающей переходы из одного состояния в другое той же энергии. В настоящее время вообще нет особенно прямого и надежного способа интерпретации периодического решения волнового уравнения в применении к непериодическому физическому явлению, такому как столкновение. (Более определенный метод, который мы сейчас предложим, показывает, что предположение Борна не совсем верно, так как необходимо домножить квадрат амплитуды на определенный множитель.)

Альтернативный метод решения задачи столкновения состоит в том, чтобы найти *непериодическое* решение волнового уравнения, которое изначально состоит просто из плоских волн, движущихся во всем пространстве в нуж-

¹⁾ Born // Zs. Phys.— 1926.— Bd 38.— S. 803.

ном направлении и с нужной частотой и представляющих налетающий электрон. С течением времени, чтобы удовлетворялось волновое уравнение, должны появиться волны, движущиеся в других направлениях. Вероятность рассеяния электрона в произвольном направлении и с произвольной энергией тогда будет зависеть от темпа роста соответствующей гармонической компоненты этих волн. Способ интерпретации математики в этом методе вполне определенный и тот же, что и в начале § 2.

Мы применим этот метод к общей задаче о системе, совершающей под действием возмущения переходы из одного состояния в другое, не меняя энергии. Пусть H_0 — гамильтониан невозмущенной системы, а V — энергия возмущения, которая не должна явно зависеть от времени. Если мы возьмем случай непрерывного множества стационарных состояний, определяемых первыми интегралами, скажем α_k , невозмущенного движения, то, следуя методу § 2, получим уравнение

$$i\hbar \dot{a}(\alpha') = \int V(\alpha' \alpha'') d\alpha'' a(\alpha''), \quad (21)$$

соответствующее уравнению (4). Вероятность нахождения системы в произвольный момент времени в состоянии, для которого каждый из α_k лежит между α'_k и $\alpha'_k + d\alpha'_k$, равна $|a(\alpha')|^2 d\alpha'_1 d\alpha'_2 \dots$, если $a(\alpha')$ правильно нормирована и удовлетворяет правильным начальным условиям. Если вначале система находилась в состоянии α^0 , то мы должны взять в качестве начального значения $a(\alpha')$ выражение типа $a^0 \delta(\alpha' - \alpha^0)$. Мы оставим a^0 произвольным, так как в данном случае нормировать $a(\alpha')$ было бы неудобно. В первом приближении мы можем подставить в правую часть (21) вместо $a(\alpha'')$ ее начальное значение. Это дает

$$i\hbar \dot{a}(\alpha') = a^0 V(\alpha' \alpha^0) = a^0 v(\alpha' \alpha^0) e^{i[W(\alpha') - W(\alpha^0)]t/\hbar},$$

где $v(\alpha' \alpha^0)$ — константа, а $W(\alpha')$ — энергия состояния α' . Следовательно,

$$i\hbar a(\alpha') = a^0 \delta(\alpha' - \alpha^0) + a^0 v(\alpha' \alpha^0) \frac{e^{i[W(\alpha') - W(\alpha^0)]t/\hbar} - 1}{i[W(\alpha') - W(\alpha^0)]/\hbar}. \quad (22)$$

Для значений α'_k , при которых $W(\alpha')$ заметно отличается от $W(\alpha^0)$, $a(\alpha')$ будет периодической функцией времени с малой, если мала энергия возмущения V , амплитудой, так что собственные функции этих стационарных состояний не будут возбуждены заметным образом. С другой

стороны, для таких значений α_k , для которых $W(\alpha') = W(\alpha^0)$, но $\alpha'_k \neq \alpha_k^0$ для некоторых k , $a(\alpha')$ равномерно растет со временем, так что вероятность нахождения системы в произвольный момент времени в состоянии α' растет пропорционально квадрату времени. Физически вероятность нахождения системы в состоянии с точно той же энергией, как и начальная собственная энергия $W(\alpha^0)$, не играет никакой роли, ибо она бесконечно мала. Нас интересует только интегральная вероятность на небольшом промежутке значений собственной энергии около начальной энергии, которая, как мы увидим, растет линейно со временем, в согласии с обычными вероятностными законами.

Перейдем от переменных $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_u$ к набору переменных, скажем, $W, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{u-1}$, являющихся произвольными независимыми функциями α_k , такими, чтобы одной из них была собственная энергия W . Вероятность найти систему в произвольный момент времени в том стационарном состоянии, в котором каждая γ_k лежит между γ'_k и $\gamma'_k + d\gamma'_k$, будет тогда равна (без учета нормирующего множителя)

$$d\gamma'_1 d\gamma'_2 \dots d\gamma'_{u-1} \int |a(\alpha')|^2 \frac{\partial(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_u)}{\partial(W', \gamma'_1, \dots, \gamma'_{u-1})} dW'. \quad (23)$$

Для времени, большого по сравнению с периодами системы, мы получим, что практически весь интеграл в (23) определяется вкладом от значений W' , очень близких к $W^0 = W(\alpha^0)$. Положим

$$a(\alpha') = a(W', \gamma')$$

и

$$\partial(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_u) / \partial(W', \gamma'_1, \dots, \gamma'_{u-1}) = J(W', \gamma').$$

Тогда (при условии, что $\gamma'_k \neq \gamma_k^0$ для некоторых k) для интеграла в (23) с помощью (22) и замены переменных $(W' - W^0) t / \hbar = x$ мы найдем

$$\begin{aligned} \int |a(W', \gamma')|^2 J(W', \gamma') dW' &= \\ &= |a^0|^2 \int |v(W', \gamma'; W^0, \gamma^0)|^2 \times \\ &\times J(W', \gamma') \frac{[e^{i(W' - W^0)t/\hbar} - 1][e^{-i(W' - W^0)t/\hbar} - 1]}{(W' - W^0)^2} dW' = \\ &= 2|a^0|^2 \int |v(W', \gamma'; W^0, \gamma^0)|^2 J(W', \gamma') \times \\ &\times [1 - \cos(W' - W^0)t/\hbar] / (W' - W^0)^2 \cdot dW' = \\ &= 2|a^0|^2 t/\hbar \cdot \int |v(W^0 + hx/t, \gamma'; W^0, \gamma^0)|^2 \times \\ &\times J(W^0 + hx/t, \gamma') (1 - \cos x) / x^2 \cdot dx. \end{aligned}$$

Для больших значений t это сводится к

$$2|a^0|^2 t/h \cdot |v(W^0, \gamma'; W^0, \gamma^0)|^2 \times \\ \times J(W^0, \gamma') \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos x)/x^2 \cdot dx = \\ = 2\pi |a^0|^2 t/h \cdot |v(W^0, \gamma'; W^0, \gamma^0)|^2 J(W^0, \gamma').$$

Вероятность перехода системы в единицу времени в состояние, в котором каждая γ_k лежит между γ'_k и $\gamma'_k + d\gamma'_k$, будет (без учета нормирующего множителя) равна

$$2\pi |a^0|^2/h \cdot |v(W^0, \gamma'; W^0, \gamma^0)|^2 J(W^0, \gamma') d\gamma'_1 d\gamma'_2 \dots d\gamma'_{n-1}, \quad (24)$$

что пропорционально квадрату матричного элемента энергии возмущения, связанного с этим переходом.

Чтобы применить этот результат к обычной задаче столкновения, мы примем за α_k компоненты импульса p_x, p_y, p_z налетающего электрона, а за γ_k — углы θ и φ , определяющие направление его движения. Если, принимая во внимание релятивистское изменение массы со скоростью, мы обозначим через P полный импульс, равный $(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{1/2}$, а через E — энергию электрона, равную $(m^2 c^4 + P^2 c^2)^{1/2}$ (m — его масса покоя), мы получим для якобиана

$$J = \frac{\partial(p_x, p_y, p_z)}{\partial(E, \theta, \varphi)} = \frac{EP}{c^2} \sin \theta.$$

Таким образом, $J(W^0, \gamma')$ в выражении (24) имеет значение

$$J(W^0, \gamma') = E' P' \sin \theta' / c^2, \quad (25)$$

где E' и P' относятся к тому значению энергии рассеянного электрона, которое делает полную энергию равной начальной энергии W^0 (т. е. к значению, требуемому законом сохранения энергии).

Мы должны теперь интерпретировать начальное значение $a(\alpha')$, именно $a^0 \delta(\alpha' - \alpha^0)$, которое мы не нормировали. Согласно § 2 волновая функция в переменных α_k есть $b(\alpha') = a(\alpha') e^{-iW't/h}$, так что ее начальное значение равно

$$a^0 \delta(\alpha' - \alpha^0) e^{-iW't/h} = \\ = a^0 \delta(p'_x - p_x^0) \delta(p'_y - p_y^0) \delta(p'_z - p_z^0) e^{-iW't/h}.$$

Если мы используем функцию преобразования¹⁾

$$(x'/p') = (2\pi\hbar)^{-3/2} e^{i \sum_{xyz} p'_x x'/\hbar}$$

и правило преобразования

$$\psi(x') = \int (x'/p') \psi(p') dp'_x dp'_y dp'_z,$$

мы получим для начальной волновой функции в координатах x, y, z выражение

$$a^0 (2\pi\hbar)^{-3/2} e^{i \sum_{xyz} p^0_x x'/\hbar} e^{-iW't/\hbar}.$$

Оно отвечает начальному распределению, при котором в единице объема находится $|a^0|^2 (2\pi\hbar)^{-3}$ электронов. Так как их скорость равна $P^0 c^2/E^0$, то число электронов, проходящих в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную их направлению движения, равно $|a^0|^2 P^0 c^2 / (2\pi\hbar)^3 E^0$. Деля на это выражение (24), мы, с учетом (25), получим

$$4\pi^2 (2\pi\hbar)^2 \frac{E'E^0}{c^4} |v(p'; p^0)|^2 \frac{P'}{P^0} \sin \theta' d\theta' d\varphi'. \quad (26)$$

Это есть эффективная площадь, в которую должен попасть электрон, чтобы он рассеялся в пространственный угол $\sin \theta' d\theta' d\varphi'$ с энергией E' . Этот результат отличается от борновского²⁾ множителем $(2\pi\hbar)^2 / 2mE' \cdot P'/P^0$. Необходимость множителя P'/P^0 в (26) можно было предугадать с помощью принципа детального равновесия, так как множитель $|v(p'; p^0)|^2$ симметричен для прямого и обратного процессов³⁾.

§ 6. Применение к квантам света

Теперь мы применим теорию § 4 к случаю, когда системами ансамбля являются световые кванты; теория применима здесь, так как кванты света подчиняются ста-

1) Символ x используется для краткого обозначения x, y, z .

2) В совсем недавней работе (Göttingen. Nachr.—1926.—S. 146) Борн, используя интерпретацию анализа, основанную на теоремах сохранения, получил результат, согласующийся с полученным в настоящей статье для случая нерелятивистской механики. Я благодарен профессору Н. Бору за предоставленную возможность досрочно ознакомиться с копией этой работы.

3) См. Klein, Rosseland // Zs. Phys.—1921.—Vd. 4.—S. 46, уравнение (4).

тистике Эйнштейна — Бозе и не взаимодействуют друг с другом. Световой квант находится в стационарном состоянии, когда он движется с постоянным импульсом по прямой линии. Таким образом, стационарное состояние r фиксируется тремя компонентами импульса светового кванта и переменной, определяющей его состояние поляризации. Мы будем работать в предположении, что имеется конечное число таких стационарных состояний, лежащих очень близко друг к другу, так как пользоваться непрерывным распределением было бы неудобно. Взаимодействие световых квантов с атомной системой будет описываться гамильтонианом вида (20), в котором $H_p(J)$ — гамильтониан изолированной атомной системы, а коэффициенты $v_{r,s}$ пока неизвестны. Мы покажем, что такой вид гамильтониана с произвольными $v_{r,s}$ приводит к эйнштейновским законам испускания и поглощения излучения.

Световой квант обладает одной странной особенностью: он, видимо, прекращает существовать, когда находится в одном из своих стационарных состояний, а именно в нулевом состоянии, в котором его импульс, а следовательно, и энергия, равны нулю. Поглощение светового кванта может рассматриваться как его прыжок в это нулевое состояние, а его испускание — как прыжок из нулевого состояния в такое, где его существование физически очевидно, так что кажется, что он был вновь создан. Так как нет ограничения на число световых квантов, которые могут возникать таким образом, мы должны предположить, что в нулевом состоянии их бесконечно много, так что N_0 в гамильтониане (20) бесконечно. Мы теперь должны считать θ_0 — переменную, канонически сопряженную N_0 — постоянной, поскольку

$$\theta_0 = \partial F / \partial N_0 = W_0 + \text{члены, включающие } N_0^{-1/2} \text{ или } (N_0 + 1)^{-1/2},$$

а W_0 равна нулю. Для того чтобы гамильтониан (20) мог остаться конечным, необходимо, чтобы коэффициенты $v_{r,0}$, $v_{0,r}$ были бесконечно малы. Мы предположим, что они являются бесконечно малыми такого рода, что $v_{r,0} N_0^{1/2}$ и $v_{0,r} N_0^{1/2}$ конечны, чтобы могли быть конечными вероятности переходов. Итак, положим

$$\begin{aligned} v_{r,0} (N_0 + 1)^{1/2} e^{-i\theta_0/\hbar} &= v_r; \\ v_{0,r} N_0^{1/2} e^{i\theta_0/\hbar} &= v_r^*, \end{aligned}$$

где v_r и v_r^* конечны и комплексно сопряжены. Мы можем считать v_r и v_r^* функциями только J_k и ω_k атомной си-

стемы, ведь множители $(N_0 + 1)^{1/2} e^{-i\theta_0/\hbar}$ и $N_0 e^{i\theta_0/\hbar}$ практически постоянны, так как скорость изменения N_0 очень мала по сравнению с N_0 . Гамильтониан (20) теперь запишется как

$$F = H_p(J) + \sum_r W_r N_r + \sum_{r \neq 0} [v_r N_r^{1/2} e^{i\theta_r/\hbar} + v_r^* (N_r + 1)^{1/2} e^{-i\theta_r/\hbar}] + \sum_{r \neq 0} \sum_{s \neq 0} v_{rs} N_r^{1/2} (N_s + 1 - \delta_{rs})^{1/2} e^{i(\theta_r - \theta_s)/\hbar}. \quad (27)$$

Вероятность перехода, при котором поглощается квант света, находящийся в состоянии r , пропорциональна квадрату модуля относящегося к этому переходу матричного элемента гамильтониана. Матричный элемент должен получиться из члена $v_r N_r^{1/2} e^{i\theta_r/\hbar}$ в гамильтониане и, следовательно, должен быть пропорционален $N_r^{1/2}$, где N_r — число световых квантов в состоянии r до процесса перехода. Вероятность процесса поглощения, таким образом, пропорциональна N_r . Аналогично, вероятность испускания кванта света в состоянии r пропорциональна $N_r + 1$, а вероятность рассеяния кванта из состояния r в состояние s пропорциональна $N_r (N_s + 1)^{1/2}$. Процессы излучения более общего типа, рассмотренные Эйнштейном и Эренфестом²⁾, в которых одновременно принимает участие более одного кванта света, настоящей теорией не разрешены.

Чтобы установить связь между числом квантов света в стационарном состоянии и интенсивностью излучения, рассмотрим полость конечного объема, скажем A , содержащую излучение. Число стационарных состояний световых квантов данной поляризации, чьи частоты лежат в пределах от ν_r до $\nu_r + d\nu_r$, а направления движения — в телесном угле $d\omega_r$ вокруг направления движения для

¹⁾ В своей следующей статье «The quantum theory of dispersion» (Proc. Roy. Soc. A.—1927.—V. 114—P. 710) Дирак исправил допущенную здесь неточность:

«В loc. cit., § 6, ошибочно принималось, что V_{mn} вызывает переходы из m в n (а не наоборот, — *Ред.*), и следовательно, полученная там информация о процессах поглощения (испускания) в терминах квантов света, существующих до процесса, в действительности относится к процессам испускания (поглощения) в терминах световых квантов, существующих после процесса. Эта замена, конечно, не влияет на результаты (а именно, на доказательство эйнштейновских законов), которые зависят от $|V_{mn}|^2 = |V_{nm}|^2$ ». — *Примеч. ред.*

²⁾ Zs. Phys.—1923.—Bd 19.—S. 301.

состояния r , будет тогда $A\nu_r^2 d\nu_r d\omega_r/c^3$. Энергия световых квантов, находящихся в этих состояниях, будет поэтому равна $N'_r \cdot 2\pi h\nu_r A\nu_r^2 d\nu_r d\omega_r/c^3$. Это должно равняться $Ac^{-1}I_r d\nu_r d\omega_r$, где I_r —интенсивность излучения единичного интервала частот вокруг состояния r . Следовательно,

$$I_r = N'_r (2\pi h) \nu_r^3/c^2, \quad (28)$$

так что N'_r пропорционально I_r и $N'_r + 1$ пропорционально $I_r + (2\pi h) \nu_r^3/c^2$. Таким образом, мы получим, что вероятность процесса поглощения пропорциональна I_r —начальной интенсивности единичного интервала частот, а процесса излучения— $I_r + (2\pi h) \nu_r^3/c^2$, что как раз и является эйнштейновскими законами¹⁾. Точно так же, вероятность процесса, в котором квант света рассеивается из состояния r в состояние s , пропорциональна $I_r [I_s + (2\pi h) \nu_s^3/c^2]$, что совпадает с законом Паули для рассеяния излучения электроном²⁾.

§ 7. Коэффициенты вероятности испускания и поглощения

Теперь мы рассмотрим взаимодействие атома и излучения с волновой точки зрения. Мы разложим излучение на его фурье-компоненты и предположим, что их число велико, но конечно. Пусть каждая компонента помечена индексом r , и предположим, что имеется σ_r компонент, связанных с излучением определенного типа поляризации в единичном телесном угле и единичном интервале частот вокруг компоненты r . Каждая компонента r может быть описана векторным потенциалом κ_r , выбранным так, чтобы скалярный потенциал обращался в нуль. Член, отвечающий возмущению, который нужно добавить к гамильтониану, согласно классической теории (пренебрегая релятивистской механикой), будет равен $c^{-1} \sum_r \kappa_r \dot{X}_r$, где X_r —компонента полной поляризации атома в направлении κ_r , т. е. в направлении электрического вектора компоненты r .

¹⁾ Отношение вынужденного излучения к спонтанному в настоящей теории в два раза больше, чем у Эйнштейна. Это произошло потому, что в настоящей теории каждая поляризованная компонента начального излучения может возбудить только таким же образом поляризованное излучение, тогда как у Эйнштейна обе компоненты поляризации рассматриваются вместе. Это замечание относится также и к процессам рассеяния.

²⁾ *Pauli // Zs. Phys.—1923.— Bd 18.— S. 272.*

Мы можем, как объяснено в § 1, предположить, что поле описывается каноническими переменными N_r и θ_r , из которых N_r — число квантов энергии компоненты r , а θ_r — канонически сопряженная ему фаза, в $2\pi h \nu_r$ раз большая θ_r из § 1. Тогда мы получим $\kappa_r = a_r \cos \theta_r / h$, где a_r — амплитуда κ_r , которую можно связать с N_r следующим образом: поток энергии через единичную площадь за единицу времени для компоненты r равен $1/2 \pi c^{-1} a_r^2 \nu_r^2$. Следовательно, интенсивность излучения в единичном интервале частот вблизи компоненты r равна $I_r = 1/2 \pi c^{-1} a_r^2 \nu_r^2 \sigma_r$. Сравнив это с уравнением (28), получим, что $a_r = 2 (h \nu_r / c \sigma_r)^{1/2} N_r^{1/2}$, и, следовательно,

$$\kappa_r = 2 (h \nu_r / c \sigma_r)^{1/2} N_r^{1/2} \cos \theta_r / h.$$

Гамильтониан полной системы (атом плюс излучение) согласно классической теории будет равен

$$F = H_p(J) + \sum_r (2\pi h \nu_r) N_r + \\ + 2c^{-1} \sum_r (h \nu_r / c \sigma_r)^{1/2} \dot{X}_r N_r^{1/2} \cos \theta_r / h, \quad (29)$$

где $H_p(J)$ — гамильтониан изолированного атома. В квантовой теории мы должны сделать N_r и θ_r каноническими q -числами, так же, как и описывающие атом J_k , ω_k . Мы должны заменить $N_r^{1/2} \cos \theta_r / h$ в (29) вещественным q -числом

$$\frac{1}{2} \{N_r^{1/2} e^{i\theta_r/h} + e^{-i\theta_r/h} N_r^{1/2}\} = \\ = \frac{1}{2} \{N_r^{1/2} e^{i\theta_r/h} + (N_r + 1)^{1/2} e^{-i\theta_r/h}\},$$

так что гамильтониан (29) превратится в

$$F = H_p(J) + \sum_r (2\pi h \nu_r) N_r + \\ + h^{1/2} c^{-3/2} \sum_r (\nu_r / \sigma_r)^{1/2} \dot{X}_r \{N_r^{1/2} e^{i\theta_r/h} + (N_r + 1)^{1/2} e^{-i\theta_r/h}\}. \quad (30)$$

Он имеет вид (27) с

$$v_r = v_r^* = h^{1/2} c^{-3/2} (\nu_r / \sigma_r)^{1/2} \dot{X}_r$$

и

$$v_{rs} = 0 \quad (r, s \neq 0).$$

Волновая точка зрения, таким образом, совместима с точкой зрения световых квантов и дает значения для неизвестных в теории квантов света коэффициентов взаимо-

действия v_{rs} . Эти значения таковы, что они не позволяют выразить энергию взаимодействия алгебраической функцией канонических переменных. Так как волновая теория дает $v_{rs} = 0$ для $r, s \neq 0$, то могло бы показаться, что прямых процессов рассеяния не бывает, но это может быть следствием неполноты настоящей волновой теории.

Покажем теперь, что гамильтониан (30) приводит к правильным выражениям для эйнштейновских коэффициентов A и B . Сперва мы должны немного модифицировать анализ § 5, чтобы применить его к случаю, когда система имеет большое число дискретных стационарных состояний вместо непрерывного множества. Вместо уравнения (21) мы теперь будем иметь

$$i\hbar \dot{a}(\alpha') = \sum_{\alpha''} V(\alpha' \alpha'') a(\alpha'').$$

Если система изначально находилась в состоянии α^0 , мы должны взять начальное значение $a(\alpha')$ равным $\delta_{\alpha' \alpha^0}$; теперь оно правильно нормировано. Это даст в первом приближении

$$i\hbar \dot{a}(\alpha') = V(\alpha' \alpha^0) = v(\alpha' \alpha^0) e^{i[W(\alpha') - W(\alpha^0)]t/\hbar},$$

что приводит к уравнению

$$i\hbar a(\alpha') = \delta_{\alpha' \alpha^0} + v(\alpha' \alpha^0) \frac{e^{i[W(\alpha') - W(\alpha^0)]t/\hbar} - 1}{i[W(\alpha') - W(\alpha^0)]/\hbar},$$

соответствующему (22). Если, как и раньше, мы перейдем к переменным $W, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{u-1}$, то получим (если $\gamma' \neq \gamma^0$)

$$a(W', \gamma') = v(W', \gamma'; W^0, \gamma^0) [1 - e^{i(W' - W^0)t/\hbar}] / (W' - W^0).$$

Вероятность нахождения системы в состоянии, в котором каждое γ_k равно γ'_k , есть $\sum_{W'} |a(W', \gamma')|^2$. Если стационарные состояния лежат близко друг от друга и время t не очень велико, мы можем заменить эту сумму интегралом $(\Delta W)^{-1} \int |a(W', \gamma')|^2 dW'$, где ΔW — расстояние между уровнями энергии. Вычисляя этот интеграл так же, как и раньше, получим для вероятности перехода в единицу времени в состояние, в котором каждое $\gamma_k = \gamma'_k$,

$$2\pi/\hbar \Delta W \cdot |v(W^0, \gamma'; W^0, \gamma^0)|^2. \quad (32)$$

Применяя этот результат, мы можем взять за γ_k любую систему переменных, независимых от полной собственной энергии W , которые вместе с W определяют стационарные состояния.

Теперь мы вернемся к задаче, определенной гамильтонианом (30), и рассмотрим процесс поглощения, в котором атом перескакивает из состояния J^0 в состояние J' с поглощением кванта света из состояния r . Выберем за переменные γ' переменные J' атома вместе с переменными, определяющими направление движения и состояние поляризации поглощенного кванта, но не его энергию. Матричный элемент $v(W^0, \gamma'; W^0, \gamma^0)$ будет тогда равен

$$h^{1/2} c^{-3/2} (v_r / \sigma_r)^{1/2} \dot{X}_r (J^0 J') N_r^0,$$

где $\dot{X} (J^0 J')$ — обычный $(J^0 J')$ матричный элемент \dot{X}_r . Следовательно, из (32) вероятность процесса поглощения в единицу времени равна

$$\frac{2\pi}{h\Delta W} \frac{h v_r}{c^3 \sigma_r} |\dot{X}_r (J^0 J')|^2 N_r^0.$$

Чтобы получить вероятность процесса, в котором световой квант появляется из любого направления в телесном угле $d\omega$, мы должны домножить это выражение на число возможных направлений для квантов света в телесном угле $d\omega$, которое равно $d\omega \sigma_r \Delta W / 2\pi h$. Это, с помощью (28), дает

$$d\omega \frac{v_r}{hc^3} |\dot{X}_r (J^0 J')|^2 N_r^0 = d\omega \frac{1}{2\pi h^2 c v_r^2} |\dot{X}_r (J^0 J')|^2 I_r.$$

Следовательно, коэффициент вероятности процесса поглощения равен $1/2\pi h^2 c v_r^2 \cdot |\dot{X}_r (J^0 J')|^2$, что находится в согласии с обычным значением для эйнштейновского коэффициента поглощения в матричной механике. Таким же способом может быть доказано согласие коэффициентов испускания.

Настоящая теория, поскольку она дает правильное описание спонтанного излучения, по-видимому должна давать и эффекты реакции излучения на испускающую систему и позволить сосчитать естественную ширину спектральных линий, если окажется возможным преодолеть математические трудности, заключенные в общем решении волновой задачи, отвечающей гамильтониану (30). Теория также позволяет понять, как получается, что не происходит нарушения закона сохранения энергии, когда, скажем, фотоэлектрон испускается атомом под действием крайне слабого падающего излучения. Энергия взаимодействия атома и излучения — это q -число, которое не коммутирует с первыми интегралами движения изолированного атома и с интенсивностью излучения. Поэтому

нельзя задать эту энергию c -числом одновременно с заданием c -числами стационарного состояния атома и интенсивности излучения. В частности, нельзя говорить, что энергия взаимодействия стремится к нулю, когда интенсивность падающего излучения стремится к нулю. В энергии взаимодействия всегда имеется неопределенная величина, которая может превратиться в энергию фотоэлектрона.

Я бы хотел выразить благодарность профессору Н. Бору за его интерес к этой работе и многочисленные дружественные обсуждения.

Резюме

Рассмотрена задача взаимодействия ансамбля одинаковых систем, удовлетворяющих статистической механике Эйнштейна—Бозе, с отличной от них другой системой; получена функция Гамильтона, описывающая движение. Теория применена к взаимодействию ансамбля световых квантов с обычным атомом, и показано, что она дает эйнштейновские законы испускания и поглощения излучения.

Затем рассмотрено взаимодействие атома с электромагнитными волнами и показано, что если считать энергии и фазы волн не c -числами, а q -числами, удовлетворяющими подходящим квантовым условиям, то гамильтониан примет тот же вид, что и в подходе, использующем кванты света. Теория ведет к правильным выражениям для эйнштейновских коэффициентов A и B .

5. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОНА ¹⁾

Proceedings of the Royal Society
A vol. 117 (1928), pp. 610—624

THE QUANTUM THEORY OF THE ELECTRON

By P. A. M. DIRAC, St. John's College, Cambridge

(Communicated by R. H. Fowler, F. R. S.—Received January 2, 1928)

Новая квантовая механика, если ее применять к задаче о структуре атома с электронами, представляющими собою точечные заряды, не приводит к результатам, находящимся в согласии с экспериментом. Расхождение состоит в явлении «удвоения» — наблюдаемое число стационарных состояний электрона в атоме в два раза больше числа, даваемого теорией. Чтобы обойти эту трудность, Гаудсмит и Уленбек ввели представление об электроне со спиновым угловым моментом в половину кванта и магнитным моментом в один магнетон Бора. Эта модель электрона была приведена в соответствие с новой механикой Паули ²⁾, а Дарвин ³⁾, работая в рамках эквивалентной теории, показал, что она дает результаты, согласующиеся с опытом для водородоподобных спектров в первом порядке точности.

Остается вопрос, почему Природа должна была выбрать такую модель для электрона, а не удовлетвориться точечным зарядом. Хотелось бы обнаружить некоторую неполноту в прежних способах применения квантовой механики к точно-заряженному электрону, такую, что после ее восполнения все явление удвоения следовало бы без произвольных предположений. В этой статье будет показано, что так и обстоит дело, причем неполнота прежних теорий состоит в их несогласии с релятивизмом, или же, напротив, с общей теорией преобразований квантовой

¹⁾ Перевод с английского М. К. Поливанова.

²⁾ *Pauli // Zs. Phys.*—1927.—Bd 43.—S. 601.

³⁾ *Darwin // Roy. Soc. Proc. A.*—1927.—V. 116.—P. 227.

механики. Оказывается, что простейший гамильтониан точечно-заряженного электрона, удовлетворяющий одновременно требованиям релятивизма и общей теории преобразований, приводит к объяснению всех явлений удвоения без всяких дополнительных предположений. Тем не менее, в модели вращающегося электрона есть большая доля правды, по меньшей мере в первом приближении. Самая важная неудача этой модели, как кажется, состоит в том, что величина результирующего орбитального момента электрона, движущегося в центральном поле, на самом деле не постоянна, в отличие от предсказаний модели.

§ 1. Прежние релятивистские описания

Релятивистский гамильтониан для точечного электрона, движущегося в произвольном электромагнитном поле со скалярным потенциалом A_0 и векторным \mathbf{A} , согласно классической теории есть

$$F \equiv \left(\frac{W}{c} + \frac{e}{c} A_0 \right)^2 + \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + m^2 c^2,$$

где \mathbf{p} — вектор импульса. Гордон¹⁾ предложил получать оператор волнового уравнения квантовой теории из этого F по тем же правилам, что и в нерелятивистской теории, т. е. полагая в нем

$$W = ih \frac{\partial}{\partial t}, \quad p_r = -ih \frac{\partial}{\partial x_r}, \quad r = 1, 2, 3.$$

Так мы получаем волновое уравнение

$$F\psi \equiv \left[\left(ih \frac{\partial}{c \partial t} + \frac{e}{c} A_0 \right)^2 + \sum_r \left(-ih \frac{\partial}{\partial x_r} + \frac{e}{c} A_r \right)^2 + m^2 c^2 \right] \psi = 0, \quad (1)$$

причем волновая функция ψ зависит от x_1, x_2, x_3, t . Это приводит к двум трудностям.

Первая связана с физической интерпретацией ψ . Гордон и независимо от него также Клейн²⁾ в результате рассмотрения теорем сохранения, делают предположение, что если ψ_m и ψ_n — два решения, то

$$\rho_{mn} = -\frac{e}{2mc^2} \left\{ ih \left(\psi_m \frac{\partial \bar{\psi}_n}{\partial t} - \bar{\psi}_n \frac{\partial \psi_m}{\partial t} \right) + 2e A_0 \psi_m \bar{\psi}_n \right\}$$

¹⁾ Gordon // Zs. Phys.—1926.— Bd 40.— P. 117.

²⁾ Klein // Zs. Phys.—1927.— Bd 41.— S. 407

$$I_{mn} = -\frac{e}{2m} \left\{ -ih (\psi_m \text{grad } \bar{\psi}_n - \bar{\psi}_n \text{grad } \psi_m) + 2 \frac{e}{c} \mathbf{A} \psi_m \bar{\psi}_n \right\}$$

должны интерпретироваться как заряд и ток, связанные с переходом $m \rightarrow n$. Это кажется удовлетворительным, пока речь идет об испускании и поглощении излучения, но это не столь общая интерпретация, как в нерелятивистской квантовой механике, которая была развита¹⁾ достаточно, чтобы ответить на такой вопрос: какова вероятность для любой динамической переменной в любой заданный момент времени принимать значение, лежащее в заданном промежутке значений, если система описывается волновой функцией ψ_n ? Интерпретация Гордона — Клейна позволяет ответить на этот вопрос, если он относится к положению электрона (с помощью ρ_{nn}), однако не тогда, когда вопрос относится к импульсу, угловому моменту или любой другой динамической переменной. Мы же ожидаем, что интерпретация релятивистской теории должна быть столь же общей, как и нерелятивистской теории.

Общая интерпретация нерелятивистской квантовой механики основана на теории преобразований и оказывается возможной благодаря тому, что волновое уравнение имеет вид

$$(H - W)\psi = 0, \quad (2)$$

т. е. линейно по W или $\partial/\partial t$, так что волновая функция в любой момент времени определяет волновую функцию в каждый более поздний момент времени. Волновое уравнение релятивистской теории тоже должно быть линейно по W , чтобы такая интерпретация была возможна.

Вторая трудность интерпретации Гордона возникает из того факта, что, если рассмотреть комплексно-сопряженное к (1) уравнение

$$\left[\left(-\frac{W}{c} + \frac{e}{c} A_0 \right)^2 + \left(-\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + m^2 c^2 \right] \psi = 0,$$

то оно совпадает с (1) после замены e на $-e$. Таким образом, уравнение (1) одинаково хорошо описывает и электрон с зарядом e , и электрон с зарядом $-e$. Если мы рассмотрим для определенности предельный случай больших квантовых чисел, то увидим, что некоторые из

¹⁾ *Jordan // Zs. Phys.*— 1927.— Bd 40.— P. 809; *Dirac // Proc. Roy. Soc. A.*— 1927.— V. 113.— P. 621.

решений волнового уравнения—это волновые пакеты, движущиеся так, как двигалась бы частица с зарядом e в классической теории, тогда как другие—это волновые пакеты, двигающиеся так, как двигалась бы классическая частица с зарядом $-e$. Для этого второго класса решений W принимает отрицательные значения. Мы преодолеваем эту трудность в классической теории, произвольно исключая такие решения, у которых W отрицательно. Этого нельзя сделать в квантовой теории, так как в общем случае возмущение может вызывать переходы из состояний с положительным W в состояния с отрицательным W . Экспериментально такой переход выглядел бы так, как будто электрон мгновенно изменяет свой заряд от $-e$ к e ,—явление, которое никогда не наблюдалось. Поэтому настоящее релятивистское волновое уравнение должно быть таким, чтобы его решения разбивались на два не смешивающихся класса, относящихся соответственно к заряду $-e$ и заряду e .

В этой статье мы займемся устранением лишь первой из этих двух трудностей. Получающаяся теория поэтому останется только приближенной, но она кажется достаточно хорошей, чтобы приводить ко всем явлениям удвоения без произвольных предположений.

§ 2. Гамильтониан в отсутствие поля

Наша задача состоит в том, чтобы получить волновое уравнение вида (2), которое было бы инвариантно относительно преобразований Лоренца и которое было бы эквивалентно (1) в пределе больших квантовых чисел. Мы рассмотрим сначала случай отсутствия поля, когда уравнение (1) сводится к

$$(-p_0^2 + p^2 + m^2 c^2) \psi = 0, \quad (3)$$

если мы положим

$$p_0 = \frac{W}{c} = i\hbar \frac{\partial}{c \partial t}.$$

Симметрия между p_0 и p_1, p_2, p_3 , нужная для релятивизма, показывает, что раз мы хотим, чтобы гамильтониан был линеен по p_0 , он должен быть линеен и по p_1, p_2, p_3 . Значит, наше волновое уравнение будет иметь вид

$$(p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta) \psi = 0, \quad (4)$$

где пока о динамических переменных или операторах $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ нам известно только одно—они не зависят

от p_0, p_1, p_2, p_3 , т. е. что они коммутируют с t, x_1, x_2, x_3 . Поскольку мы рассматриваем случай движения частицы в пустом пространстве, так что все точки пространства эквивалентны, то следует ожидать, что гамильтониан не содержит t, x_1, x_2, x_3 . Но это значит, что $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ не зависят от t, x_1, x_2, x_3 , и потому коммутируют с p_0, p_1, p_2, p_3 . Следовательно, обязательно существуют другие динамические переменные, помимо координат и импульсов электрона, так чтобы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ могли быть функциями этих переменных. И значит, волновая функция ψ должна зависеть от большего числа переменных, чем только x_1, x_2, x_3, t .

Уравнение (4) приводит к

$$0 = (-p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta) \times \\ \times (p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta) \psi = \\ = [-p_0^2 + \sum \alpha_r^2 p_r^2 + \sum (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1) p_1 p_2 + \\ + \beta^2 + \sum (\alpha_1 \beta + \beta \alpha_1) p_1] \psi, \quad (5)$$

где знак \sum относится к циклической перестановке индексов 1, 2, 3. Это согласуется с (3), если

$$\left. \begin{aligned} \alpha_r^2 = 1, \quad \alpha_r \alpha_s + \alpha_s \alpha_r = 0 \quad (r \neq s) \\ \beta^2 = m^2 c^2, \quad \alpha_r \beta + \beta \alpha_r = 0 \end{aligned} \right\} r, s = 1, 2, 3.$$

Если положить $\beta = \alpha_4 m c$, то эти условия сводятся к

$$\alpha_\mu^2 = 1, \quad \alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu = 0 \quad (\mu \neq \nu), \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4. \quad (6)$$

Мы можем предположить, что α_μ выражаются матрицами в какой-либо матричной системе, так что α_μ имеют матричные элементы, скажем $\alpha_\mu(\xi' \xi'')$. Волновая функция ψ должна теперь быть также и функцией ξ , кроме x_1, x_2, x_3, t . Результат умножения α_μ на ψ будет теперь функцией $(\alpha_\mu \psi)$ переменных x_1, x_2, x_3, t, ξ , определенной посредством

$$(\alpha_\mu \psi)(x, t, \xi) = \sum_{\xi'} \alpha_\mu(\xi \xi') \psi(x, t, \xi').$$

Теперь мы должны разыскать четыре матрицы α , удовлетворяющие условиям (6). Мы воспользуемся матрицами

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

которые ввел Паули¹⁾ для описания трех компонент спинового момента. Эти матрицы имеют как раз те свойства

$$\sigma_r^2 = 1 \quad \sigma_r \sigma_s + \sigma_s \sigma_r = 0 \quad (r \neq s), \quad (7)$$

¹⁾ Pauli // Loc. cit.

которых мы требуем для α . Однако мы не можем просто взять σ в качестве трех из наших α , потому что тогда невозможно будет найти четвертую. Надо расширить σ диагональным образом, добавив еще две строки и два столбца, чтобы можно было ввести еще три матрицы ρ_1, ρ_2, ρ_3 того же типа, что и $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, но относящихся к другим строкам и столбцам, так что

$$\sigma_1 = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{Bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{Bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Bmatrix},$$

$$\rho_1 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \rho_3 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Bmatrix}.$$

Матрицы ρ получаются из σ перестановкой второй и третьей строки и второго и третьего столбца. Получаем теперь, в дополнение к уравнениям (7),

$$\left. \begin{aligned} \rho_r^2 = 1, \quad \rho_r \rho_s + \rho_s \rho_r = 0 \quad (r \neq s), \\ \rho_r \sigma_i = \sigma_i \rho_r. \end{aligned} \right\} \quad (7')$$

а также

Если мы теперь выберем

$$\alpha_1 = \rho_1 \sigma_1, \quad \alpha_2 = \rho_1 \sigma_2, \quad \alpha_3 = \rho_1 \sigma_3, \quad \alpha_4 = \rho_3,$$

то все условия (6) будут выполнены, например

$$\alpha_1^2 = \rho_1 \sigma_1 \rho_1 \sigma_1 = \rho_1^2 \sigma_1^2 = 1, \\ \alpha_1 \alpha_2 = \rho_1 \sigma_2 \rho_1 \sigma_1 = \rho_1^2 \sigma_1 \sigma_2 = -\rho_1^2 \sigma_2 \sigma_1 = -\alpha_2 \alpha_1.$$

Для дальнейших ссылок выпишем еще следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \rho_1 \rho_2 = i \rho_3 = -\rho_2 \rho_1, \\ \sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3 = -\sigma_2 \sigma_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогичные уравнения получаются при циклической перестановке индексов.

Волновое уравнение теперь принимает вид

$$[\rho_0 + \rho_1(\sigma, \mathbf{p}) + \rho_3 mc] \psi = 0, \quad (9)$$

где σ обозначает вектор $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

§ 3. Доказательство инвариантности относительно преобразования Лоренца

Умножим уравнение (9) на ρ_3 с левой стороны. С помощью (8) убедимся, что оно принимает вид

$$[\rho_3 p_0 + i\rho_2 (\sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3) + mc] \psi = 0.$$

Положив

$$\rho_0 = i\rho_4, \quad \rho_3 = \gamma_4, \quad \rho_2 \sigma_r = \gamma_r, \quad r = 1, 2, 3, \quad (10)$$

получим

$$[i \sum \gamma_\mu p_\mu + mc] \psi = 0, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (11)$$

Импульсы p_μ преобразуются при преобразовании Лоренца как

$$p'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} p_\nu,$$

где коэффициенты $a_{\mu\nu}$ — это c -числа, удовлетворяющие условиям

$$\sum_\mu a_{\mu\nu} a_{\mu\tau} = \delta_{\nu\tau}, \quad \sum_\tau a_{\mu\tau} a_{\nu\tau} = \delta_{\mu\nu}.$$

Поэтому волновое уравнение переходит в

$$[i \sum \gamma'_\mu p'_\mu + mc] \psi = 0, \quad (12)$$

где

$$\gamma'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} \gamma_\nu.$$

Но матрицы γ_μ , как и α_μ , удовлетворяют

$$\gamma_\mu^2 = 1, \quad \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 0 \quad (\mu \neq \nu).$$

Эти соотношения записываются единым уравнением,

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}.$$

Имеем далее

$$\begin{aligned} \gamma'_\mu \gamma'_\nu + \gamma'_\nu \gamma'_\mu &= \sum_{\tau\lambda} a_{\mu\tau} a_{\nu\lambda} (\gamma_\tau \gamma_\lambda + \gamma_\lambda \gamma_\tau) = \\ &= 2 \sum_{\tau\lambda} a_{\mu\tau} a_{\nu\lambda} \delta_{\tau\lambda} = 2 \sum_\tau a_{\mu\tau} a_{\nu\tau} = 2\delta_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

т. е. γ'_μ удовлетворяют тем же соотношениям, что и γ_μ . Значит, можно положить, аналогично (10),

$$\gamma'_4 = \rho'_3, \quad \gamma'_\tau = \rho'_2 \sigma'_\tau,$$

причем легко убедиться в том, что ρ' и σ' удовлетворяют соотношениям, соответствующим (7), (7') и (8), если определить ρ'_2 и ρ'_1 посредством $\rho'_2 = -i\gamma'_1 \gamma'_2 \gamma'_3$, $\rho'_1 = -i\rho'_2 \rho'_3$.

Теперь мы покажем, что с помощью канонического преобразования ρ' и σ' могут быть приведены к виду ρ'_3 и ρ'_1 . Из уравнения $\rho_3'^2 = 1$ следует, что характеристические числа ρ_3' могут быть только ± 1 . Если применить к ρ_3' каноническое преобразование с функцией преобразования ρ'_1 , то получим

$$\rho'_1 \rho_3' (\rho'_1)^{-1} = -\rho_3' \rho_1' (\rho'_1)^{-1} = -\rho_3'.$$

Так как характеристические числа не меняются при каноническом преобразовании, ρ_3' обязано иметь те же характеристические числа, что и $-\rho_3'$. Поэтому характеристические числа ρ_3' — суть два раза $+1$ и два раза -1 . Та же аргументация справедлива и в отношении остальных ρ' и каждой из σ' . Так как ρ_3' и σ_3' коммутируют, они могут быть одновременно приведены к диагональному виду с помощью канонического преобразования. Значит, у них будут стоять по диагонали две $+1$ и две -1 . Поэтому, должным образом переставив столбцы и строки, их можно привести к виду ρ_3 и σ_3 соответственно. (Возможность $\rho_3' = \pm \sigma_3'$ исключается существованием матриц, коммутирующих с одной и не коммутирующих с другой.)

Любая матрица, содержащая четыре столбца и строки, может быть представлена в виде

$$c + \sum_r c_r \sigma_r + \sum_r c'_r \rho_r + \sum_{rs} c_{rs} \rho_r \sigma_s, \quad (13)$$

где шестнадцать коэффициентов c , c_r , c'_r , c_{rs} суть c -числа. Записывая в такой форме σ'_1 , мы видим, что из того факта, что она коммутирует с $\rho_3' = \rho_3$ и антикоммутирует¹⁾ с $\sigma_3' = \sigma_3$, следует, что она должна иметь вид

$$\sigma'_1 = c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2 + c_{31} \rho_3 \sigma_1 + c_{32} \rho_3 \sigma_2.$$

Иными словами,

$$\sigma'_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{pmatrix}.$$

Из условия $\sigma_1'^2 = 1$ следует, что $a_{12} a_{21} = 1$, $a_{34} a_{43} = 1$. Если теперь применить каноническое преобразование: умножить первую строку на $(a_{21}/a_{12})^{1/2}$, третью строку — на $(a_{43}/a_{34})^{1/2}$, а первый и третий столбцы разделить на те же выражения, то σ'_1 будет приведена к виду σ_1 , а диагональные матрицы σ_3' и ρ_3 не изменятся.

¹⁾ Мы говорим, что a антикоммутирует с b , если $ab = -ba$.

Теперь, если выразить ρ'_1 в виде (13) и воспользоваться тем, что она коммутирует с $\sigma'_1 = \sigma_1$ и $\sigma'_3 = \sigma_3$ и антикоммутирует с $\rho'_3 = \rho_3$, то мы увидим, что она должна быть вида

$$\rho'_1 = c'_1 \rho_1 + c'_2 \rho_2.$$

Условие $\rho'^2_1 = 1$ требует, чтобы было $c'^2_1 + c'^2_2 = 1$, или $c'_1 = \cos \theta$, $c'_2 = \sin \theta$. Значит, ρ'_1 имеет вид

$$\rho'_1 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & 0 & 0 \end{Bmatrix}.$$

Применим теперь каноническое преобразование: первую и вторую строки умножим на $e^{i\theta}$, а первый и второй столбцы поделим на то же выражение, ρ'_1 приведет к виду ρ_1 , а σ_1 , σ_3 , ρ_3 не изменятся; ρ'_2 и σ'_2 должны иметь вид ρ_2 и σ_2 вследствие соотношений $i\rho'_2 = \rho'_3 \rho'_1$, $i\sigma'_2 = \sigma'_3 \sigma'_1$.

Таким образом, при помощи последовательности канонических преобразований, которые сводятся к одному каноническому преобразованию, все матрицы ρ' и σ' приводятся к виду ρ и σ . Новое волновое уравнение (12) таким путем вновь приводится к виду исходного волнового уравнения (11) или (9), так что все результаты, получаемые из исходного волнового уравнения, не должны зависеть от системы отсчета.

§ 4. Гамильтониан для произвольного поля

Чтобы получить гамильтониан для электрона в электромагнитном поле со скалярным потенциалом A_0 и векторным потенциалом \mathbf{A} , мы примем обычную процедуру, заменяя p_0 на $p_0 + (e/c) A_0$ и \mathbf{p} на $\mathbf{p} + (e/c) \mathbf{A}$ в гамильтониане, в котором поле отсутствует. Тогда из уравнения (9) получаем

$$\left[p_0 + \frac{e}{c} A_0 + \rho_1 \left(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \rho_3 mc \right] \psi = 0. \quad (14)$$

Этого волнового уравнения оказывается достаточно для объяснения всех явлений удвоения. Вследствие того, что матрицы ρ и σ содержат по четыре столбца и строки, оно будет иметь в четыре раза больше решений, чем нерелятивистское уравнение, и в два раза больше, чем прежнее релятивистское уравнение (1). Так как половина решений должна быть отброшена, поскольку они относятся к за-

ряду электрона $+e$, то остается правильное число решений, объясняющее явление удвоения. Данное в предыдущем разделе доказательство инвариантности относительно преобразований Лоренца применимо также и к более общему волновому уравнению (14).

Можно получить грубое представление о том, чем (14) отличается от прежнего релятивистского волнового уравнения (1), если домножить его по аналогии с (5). Это дает, если через e' мы обозначим e/c ,

$$0 = [- (p_0 + e' A_0) + \rho_1 (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} + e' \mathbf{A}) + \rho_3 mc] \times \\ \times [(p_0 + e' A_0) + \rho_1 (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} + e' \mathbf{A}) + \rho_3 mc] \psi = \\ = [- (p_0 + e' A_0)^2 + (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} + e' \mathbf{A}) + m^2 c^2 + \\ + \rho_1 \{ (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} + e' \mathbf{A}) (p_0 + e' A_0) - (p_0 + e' A_0) (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} + e' \mathbf{A}) \}] \psi. \quad (15)$$

Воспользуемся теперь общей формулой: если \mathbf{B} и \mathbf{C} — два любых вектора, коммутирующих с $\boldsymbol{\sigma}$, то

$$(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}) (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{C}) = \sum \sigma_1^2 B_1 C_1 + \sum (\sigma_1 \sigma_2 B_1 C_2 + \sigma_2 \sigma_1 B_2 C_1) = \\ = (\mathbf{B}, \mathbf{C}) + i \sum \sigma_3 (B_1 C_2 - B_2 C_1) = (\mathbf{B}, \mathbf{C}) + i (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B} \times \mathbf{C}). \quad (16)$$

Положив $\mathbf{B} = \mathbf{C} = \mathbf{p} + e' \mathbf{A}$, получим

$$(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} + e' \mathbf{A})^2 = (\mathbf{p} + e' \mathbf{A})^2 + i \sum \sigma_3 [(p_1 + e' A_1) (p_2 + e' A_2) - \\ - (p_2 + e' A_2) (p_1 + e' A_1)] = (\mathbf{p} + e' \mathbf{A})^2 + \hbar e' (\boldsymbol{\sigma}, \text{curl } \mathbf{A}).$$

Поэтому (15) перепишется в виде

$$0 = \left[- (p_0 + e' A_0)^2 + (\mathbf{p} + e' \mathbf{A})^2 + m^2 c^2 + e' \hbar (\boldsymbol{\sigma}, \text{curl } \mathbf{A}) - \right. \\ \left. - i e' \hbar \rho_1 \left(\boldsymbol{\sigma}, \text{grad } A_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \right] \psi = \\ = [- (p_0 + e' A_0)^2 + (\mathbf{p} + e' \mathbf{A})^2 + m^2 c^2 + e' \hbar (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}) + \\ + i e' \hbar \rho_1 (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E})] \psi,$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} — электрический и магнитный векторы поля.

Это отличается от (1) двумя дополнительными членами

$$\frac{e \hbar}{c} (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}) + \frac{i e \hbar}{c} \rho_1 (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E})$$

в F . Эти два члена, если поделить их на $2m$, могут рассматриваться как дополнительные члены в потенциальной энергии электрона за счет его новых степеней свободы. Электрон, следовательно, будет вести себя так, как если бы он имел магнитный момент $e \hbar / 2 m c \cdot \boldsymbol{\sigma}$ и электрический момент $i e \hbar / 2 m c \cdot \rho_1 \boldsymbol{\sigma}$. Этот магнитный момент — в точности

тот, который предполагают в модели вращающегося электрона. Поскольку электрический момент чисто мнимый, не следует ожидать его появления в этой модели. Сомнительно, чтобы такой электрический момент имел какой-либо физический смысл, так как гамильтониан в (14), с которого мы начинали, вещественен и мнимая часть появляется лишь в результате искусственного приема домножения, нужного только для того, чтобы сделать его похожим на гамильтониан прежней теории.

§ 5. Интегралы момента для движения в центральном поле

Рассмотрим подробнее движение электрона в поле центральных сил. Положим $\mathbf{A} = 0$ и $e'A_0 = V(r)$, $V(r)$ — произвольная функция радиуса r , так что гамильтониан в (14) превратится в

$$F \equiv p_0 + V + \rho_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}) + \rho_3 mc.$$

Мы определим периодические решения волнового уравнения $F\psi = 0$, означающие, что p_0 должен рассматриваться как параметр, а не как оператор; он равен энергии уровня, умноженной на $1/c$.

Найдем сперва интегралы движения — момент. Орбитальный момент \mathbf{m} определен как

$$\mathbf{m} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$$

и удовлетворяет следующим «перестановочным» («Vertauschungs») соотношениям:

$$\begin{aligned} m_1 x_1 - x_1 m_1 &= 0, & m_1 x_2 - x_2 m_1 &= ihx_3, \\ m_1 p_1 - p_1 m_1 &= 0, & m_1 p_2 - p_2 m_1 &= ihp_3, \\ \mathbf{m} \times \mathbf{m} &= ih\mathbf{m}, & m^2 m_1 - m_1 m^2 &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

и подобным соотношениям, получаемым перестановкой индексов; \mathbf{m} коммутирует также с r и с p_r — импульсом, канонически сопряженным r . Получаем

$$\begin{aligned} m_1 F - F m_1 &= \rho_1 \{ m_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}) - (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}) m_1 \} = \\ &= \rho_1(\boldsymbol{\sigma}, m_1 \mathbf{p} - \mathbf{p} m_1) = ih\rho_1(\sigma_2 p_3 - \sigma_3 p_2), \end{aligned}$$

таким образом,

$$\mathbf{m} F - F \mathbf{m} = ih\rho_1 \boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{p}. \quad (18)$$

Значит, \mathbf{m} не есть сохраняющаяся величина. Имеем

$$\begin{aligned} \sigma_1 F - F \sigma_1 &= \rho_1 \{ \sigma_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}) - (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}) \sigma_1 \} = \\ &= \rho_1(\sigma_1 \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \sigma_1, \mathbf{p}) = 2i\rho_1(\sigma_3 p_2 - \sigma_2 p_3), \end{aligned}$$

где мы воспользовались (8). Таким образом

$$\sigma F - F \sigma = -2i\rho_1 \sigma \times p.$$

Но тогда

$$(\mathbf{m} + \frac{1}{2}h\sigma) F - F (\mathbf{m} + \frac{1}{2}h\sigma) = 0.$$

Это значит, что $\mathbf{m} + \frac{1}{2}h\sigma$ (равная, скажем, \mathbf{M}) есть сохраняющаяся величина. Мы можем интерпретировать этот результат, утверждая, что электрон имеет спиновый момент $\frac{1}{2}h\sigma$, который в сумме с орбитальным моментом \mathbf{m} дает полный момент \mathbf{M} , являющийся интегралом движения.

Все перестановочные соотношения (17) выполняются, если мы пишем \mathbf{M} вместо \mathbf{m} .

В частности,

$$\mathbf{M} \times \mathbf{M} = ih \mathbf{M} \quad \text{и} \quad \mathbf{M}^2 M_z = M_z \mathbf{M}^2.$$

M_z будет переменной действия системы. Поскольку собственные значения m_z должны быть целыми и кратными h , чтобы волновая функция была однозначной, собственные значения M_z должны быть полуцелыми кратными h . Если положить

$$\mathbf{M}^2 = (j^2 - 1/4) h^2, \quad (19)$$

то j — еще одно квантовое число, и собственные значения M_z меняются от $(j - 1/2)h$ до $(-j + 1/2)h$. Значит j принимает целые значения.

Пользуясь (18), легко показать, что \mathbf{m}^2 не коммутирует с F и не является, таким образом, сохраняющейся величиной. В этом проявляется различие между излагаемой теорией и прежней теорией вращающегося электрона, в которой \mathbf{m}^2 — константа движения и определяет азимутальное квантовое число k посредством соотношения типа (19). Мы обнаружим, далее, что у нас j играет ту же роль, что и k в прежней теории.

§ 6. Уровни энергии при движении в центральном поле

Мы получим теперь волновое уравнение в виде дифференциального уравнения по r , в котором переменные, описывающие ориентацию всей системы, будут исключены. Мы можем сделать это следующим образом, пользуясь лишь элементарной некоммутативной алгеброй.

1) См. Proc. Roy. Soc. A — 1926 — V. 111. — P. 281.

В формуле (16) положим $\mathbf{B} = \mathbf{C} = \mathbf{m}$. Это дает

$$\begin{aligned}
 (\sigma, \mathbf{m})^2 &= \mathbf{m}^2 + i(\sigma, \mathbf{m} \times \mathbf{m}) = \\
 &= (\mathbf{m} + \frac{1}{2}h\sigma)^2 - h(\sigma, \mathbf{m}) - \frac{1}{4}h^2\sigma^2 - h(\sigma, \mathbf{m}) = \\
 &= \mathbf{M}^2 - 2h(\sigma, \mathbf{m}) - \frac{3}{4}h^2. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Следовательно, $\{(\sigma, \mathbf{m}) + h\}^2 = \mathbf{M}^2 + \frac{1}{4}h^2 = j^2h^2$.

До сих пор мы определяли j лишь через j^2 , так что могли бы, если бы хотели, положить jh равным $(\sigma, \mathbf{m}) + h$. Но это было бы неудобно, так как мы хотим, чтобы j был сохраняющейся величиной, а $(\sigma, \mathbf{m}) + h$ не сохраняется, хотя его квадрат есть сохраняющаяся величина. В самом деле, применяя еще раз (16), получим

$$(\sigma, \mathbf{m})(\sigma, \mathbf{p}) = i(\sigma, \mathbf{m} \times \mathbf{p}),$$

так как $(\mathbf{m}, \mathbf{p}) = 0$, и также

$$(\sigma, \mathbf{p})(\sigma, \mathbf{m}) = i(\sigma, \mathbf{p} \times \mathbf{m}),$$

так что

$$\begin{aligned}
 (\sigma, \mathbf{m})(\sigma, \mathbf{p}) + (\sigma, \mathbf{p})(\sigma, \mathbf{m}) &= \\
 &= i \sum \sigma_1 (m_2 p_3 - m_3 p_2 + p_2 m_3 - p_3 m_2) = \\
 &= i \sum \sigma_1 \cdot 2ihp_1 = -2h(\sigma, \mathbf{p}),
 \end{aligned}$$

или

$$\{(\sigma, \mathbf{m}) + h\}(\sigma, \mathbf{p}) + (\sigma, \mathbf{p})\{(\sigma, \mathbf{m}) + h\} = 0.$$

Таким образом, $(\sigma, \mathbf{m}) + h$ антикоммутирует с одним из членов в F , а именно — с $\rho_1(\sigma, \mathbf{p})$, и коммутирует с другими тремя. Следовательно, $\rho_3\{(\sigma, \mathbf{m}) + h\}$ коммутирует со всеми четырьмя членами и является, таким образом, сохраняющейся величиной. Но квадрат $\rho_3\{(\sigma, \mathbf{m}) + h\}$ должен тоже равняться j^2h^2 . Поэтому положим

$$jh = \rho_3\{(\sigma, \mathbf{m}) + h\}. \quad (21)$$

Применяя далее (16), получим

$$(\sigma, \mathbf{x})(\sigma, \mathbf{p}) = (\mathbf{x}, \mathbf{p}) + i(\sigma, \mathbf{m}).$$

Теперь одно из допустимых определений ρ_r есть

$$(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = r\rho_r + ih,$$

а из (21) имеем

$$(\sigma, \mathbf{m}) = \rho_3 jh - h.$$

Поэтому

$$(\sigma, \mathbf{x})(\sigma, \mathbf{p}) = r\rho_r + i\rho. \quad (22)$$

Введем величину ε , определенную посредством

$$r\varepsilon = \rho_1(\sigma, x). \quad (23)$$

Так как r коммутирует с ρ_1 и с (σ, x) , он должен коммутировать с ε . Имеем, таким образом,

$$r^2\varepsilon^2 = [\rho_1(\sigma, x)]^2 = (\sigma, x)^2 = x^2 = r^2,$$

или

$$\varepsilon^2 = 1.$$

В той мере, в какой мы имеем дело с моментом, в который x и p входят совершенно симметрично, то $\rho_1(\sigma, x)$, так же, как и $\rho_3(\sigma, p)$, должны коммутировать с M и j . Значит, ε коммутирует с M и j . Далее, ε должен коммутировать с p_r , так как

$$(\sigma, x)(x, p) - (x, p)(\sigma, x) = ih(\sigma, x),$$

что дает

$$r\varepsilon(rp_r + ih) - (rp_r + ih)r\varepsilon = ihre,$$

а это сводится к

$$\varepsilon p_r - p_r \varepsilon = 0.$$

Имеем далее из (22) и (23)

$$r\varepsilon\rho_1(\sigma, p) = rp_r + i\rho_3jh,$$

или

$$\rho_1(\sigma, p) = \varepsilon p_r + i\varepsilon\rho_3jh/r.$$

Следовательно,

$$F = p_0 + V + \varepsilon p_r + i\varepsilon\rho_3jh/r + \rho_3 mc. \quad (24)$$

Уравнение (23) показывает, что ε антикоммутирует с ρ_3 . Значит, мы можем с помощью канонического преобразования (включающего, возможно, x и p , так же, как σ и ρ) привести ε к виду ρ_2 из § 2, не меняя ρ_3 и других переменных, входящих в правую часть (24), так как все эти другие переменные коммутируют с ε ; $i\varepsilon\rho_3$ станет теперь $i\rho_2\rho_3 = -\rho_1$, так что волновое уравнение примет вид

$$F\psi \equiv [p_0 + V + \rho_2 p_r - \rho_1 jh/r + \rho_3 mc] \psi = 0.$$

Если мы теперь распишем это уравнение полностью, обозначая компоненты ψ , относящиеся к первой и третьей строкам (или столбцам) матрицы, соответственно, ψ_α и ψ_β , то получим

$$(F\psi)_\alpha \equiv (p_0 + V)\psi_\alpha - h \frac{\partial}{\partial r} \psi_\beta - \frac{jh}{r} \psi_\beta + mc\psi_\alpha = 0,$$

$$(F\psi)_\beta \equiv (p_0 + V)\psi_\beta + h \frac{\partial}{\partial r} \psi_\alpha - \frac{jh}{r} \psi_\alpha - mc\psi_\beta = 0.$$

Вторая и четвертая компоненты дают просто повторение тех же двух уравнений. Исключим теперь ψ_α . Если обозначить $p_0 + V + mc$ через hB , то первое уравнение станет

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r}\right)\psi_\beta = B\psi_\alpha.$$

Продифференцировав его еще раз, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2}\psi_\beta + \frac{j}{r}\frac{\partial}{\partial r}\psi_\beta - \frac{j}{r^2}\psi_\beta &= B\frac{\partial}{\partial r}\psi_\alpha + \frac{\partial B}{\partial r}\psi_\alpha = \\ &= \frac{B}{h}\left[-(p_0 + V - mc)\psi_\beta + \frac{j\hbar}{r}\psi_\alpha\right] + \frac{1}{h}\frac{\partial V}{\partial r}\psi_\alpha = \\ &= -\frac{(p_0 + V)^2 - m^2c^2}{h^2}\psi_\beta + \left(\frac{j}{r} + \frac{1}{Bh}\frac{\partial V}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r}\right)\psi_\alpha. \end{aligned}$$

Это сводится к

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2}\psi_\beta + \left[\frac{(p_0 + V)^2 - m^2c^2}{h^2} - \frac{j(j+1)}{r^2}\right]\psi_\beta - \\ - \frac{1}{Bh}\frac{\partial V}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r}\right)\psi_\beta = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Значения параметра p_0 , при которых это уравнение имеет решение, конечное в $r=0$ и в $r=\infty$, — это энергетические уровни системы, умноженные на $1/c$. Для сравнения этого уравнения с уравнениями прежней теории положим $\psi_\beta = r\chi$, так что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2}\chi + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\chi + \left[\frac{(p_0 + V)^2 - m^2c^2}{h^2} - \frac{j(j+1)}{r^2}\right]\chi - \\ - \frac{1}{Bh}\frac{\partial V}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j+1}{r}\right)\chi = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Если пренебречь последним членом, который мал, поскольку B велико, это уравнение переходит в обычное уравнение Шредингера для этой системы, в которое включены релятивистские поправки. Так как j имеет по определению и положительные, и отрицательные собственные значения, наше уравнение дает удвоенное число энергетических уровней, если мы не пренебрегаем последним членом.

Сравним теперь последний член в (26), который имеет тот же порядок величины, что и релятивистские поправки, со спиновыми поправками Дарвина и Паули. Чтобы сделать это, надо убрать член $\partial\chi/\partial r$ с помощью дальнейших преобразований волновой функции. Положим

$$\chi = B^{-1}\chi_1,$$

что дает

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \chi_1 + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \chi_1 + \left[\frac{(p_0 + V)^2 - m^2 c^2}{h^2} - \frac{j(j+1)}{r^2} \right] \chi_1 + \left[\frac{1}{Bh} \frac{j}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{1}{Bh} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{B^2 h^2} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 \right] \chi_1 = 0. \quad (27)$$

Теперь поправка в первом порядке есть

$$\frac{1}{Bh} \left(\frac{j}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right),$$

где $Bh = 2mc$ (если p_0 положителен). Для атома водорода следует положить $V = e^2/cr$. Поправка первого порядка есть тогда

$$-\frac{e^2}{2mc^2 r^3} (j+1). \quad (28)$$

Если напишем теперь $-j$ вместо $j+1$ в (27), то члены, описывающие невозмущенную систему, не изменятся, так что член

$$\frac{e^2}{2mc^2 r^3} j \quad (28')$$

дает вторую возможную поправку к тому же невозмущенному уровню.

В теории Паули и Дарвина соответствующая поправка имеет вид

$$\frac{e^2}{2mhc^2 r^3} (\sigma, \mathbf{m}),$$

где включен фактор Томаса $1/2$. Следует помнить, что в теории Паули—Дарвина результирующий орбитальный момент k играет роль нашего j . Мы должны определить k посредством

$$\mathbf{m}^2 = k(k+1)h^2,$$

а не в точной аналогии с (19), для того чтобы он мог иметь целые собственные значения, как j . Имеем из (20)

$$(\sigma, \mathbf{m})^2 = k(k+1)h^2 - h(\sigma, \mathbf{m}),$$

или

$$\{(\sigma, \mathbf{m}) + 1/2 h\}^2 = (k + 1/2)^2 h^2,$$

следовательно,

$$(\sigma, \mathbf{m}) = kh \quad \text{или} \quad -(k+1)h.$$

Таким образом, поправки имеют вид

$$\frac{e^2}{2mc^2 r^3} k \quad \text{или} \quad -\frac{e^2}{2mc^2 r^3} (k+1)$$

в согласии с (28) и (28'). Итак, наша теория приводит к тем уровням энергии, которые получены Дарвином, и согласуются с экспериментом.

6. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОНА. ЧАСТЬ II ¹⁾

Proceedings of the Royal Society
A vol. 118 (1928), pp. 351—361

THE QUANTUM THEORY OF THE ELECTRON. PART II

By P. A. M. DIRAC, St. John's College, Cambridge

(Communicated by R. H. Fowler, F. R. S.— Received February 2, 1928)

В предыдущей статье автора ²⁾ показано, что общая теория квантовой механики совместно с релятивизмом требует, чтобы волновое уравнение электрона, движущегося в произвольном электромагнитном поле с потенциалами A_0, A_1, A_2, A_3 , имело вид

$$F\psi \equiv \left[p_0 + \frac{e}{c} A_0 + \alpha_1 \left(p_1 + \frac{e}{c} A_1 \right) + \alpha_2 \left(p_2 + \frac{e}{c} A_2 \right) + \alpha_3 \left(p_3 + \frac{e}{c} A_3 \right) + \alpha_4 mc \right] \psi = 0. \quad (1)$$

Здесь α —это новые динамические переменные, которые необходимо ввести для того, чтобы удовлетворить условиям задачи. Они могут рассматриваться как описывающие некоторое внутреннее движение электрона, которое по большей части может быть принято за спин электрона, постулированный прежними теориями. Мы будем называть их переменными спина. Эти α должны удовлетворять условиям

$$\alpha_\mu^2 = 1, \quad \alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu = 0 \quad (\mu \neq \nu).$$

Они могут быть удобно выражены через шесть переменных $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, удовлетворяющих соотношениям

$$\left. \begin{aligned} & \rho_r^2 = 1, \quad \sigma_r^2 = 1, \quad \rho_r \sigma_s = \sigma_s \rho_r \quad (r, s = 1, 2, 3) \\ & \rho_1 \rho_2 = i \rho_3 = -\rho_2 \rho_1, \quad \sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3 = -\sigma_2 \sigma_1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

¹⁾ Перевод с английского М. К. Поливанова.

²⁾ Proc. Roy. Soc. A.—1928.—V. 117.—P. 610. См. предыдущую статью этого сборника. В дальнейшем цитируется как loc. cit.

вместе с соотношениями, получаемыми циклической перестановкой индексов, и связаны с α посредством уравнений

$$\alpha_1 = \rho_1 \sigma_1, \quad \alpha_2 = \rho_1 \sigma_2, \quad \alpha_3 = \rho_1 = \sigma_3, \quad \alpha_4 = \rho_3.$$

Переменные $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ образуют теперь три компоненты вектора, отвечающего (с точностью до постоянного множителя) вектору спинового момента, который появляется в теории вращающегося электрона Паули. Все ρ и σ меняются со временем, как и другие динамические переменные. Их уравнения движения, записанные в виде скобок Пуассона [,] суть

$$\dot{\rho}_r = c [\rho_r, F], \quad \dot{\sigma}_r = c [\sigma_r, F].$$

Следует отметить, что эти уравнения движения согласуются с условиями (2) так, что если эти условия выполнены вначале, они всегда остаются выполненными. Так, например,

$$\frac{i\hbar}{c} \dot{\sigma}_1 = \sigma_1 F - F \sigma_1 = 2i\rho_1 \sigma_3 \left(p_2 + \frac{e}{c} A_2 \right) - 2i\rho_1 \sigma_2 \left(p_3 + \frac{e}{c} A_3 \right).$$

Следовательно, $\dot{\sigma}_1$ антикоммутирует с σ_1 , так что

$$d\sigma_1^2/dt = \dot{\sigma}_1 \sigma_1 + \sigma_1 \dot{\sigma}_1 = 0.$$

Эти ρ и σ , а, следовательно, и любые функции от них, могут быть представлены матрицами с четырьмя строками и столбцами. Возможное представление, в котором ρ_3 и σ_3 — диагональные матрицы, дается в loc. cit., § 2. Такое представление можно применять только в один момент времени, поскольку ρ и σ меняются со временем. Чтобы получить такое представление, которое сохраняется во все моменты времени, так, что уравнения движения выполняются в нем, мы должны были бы сделать диагональными матрицами только интегралы движения. Однако для решения волнового уравнения (1) вполне корректно пользоваться матричным представлением ρ и σ , имеющим место только в один момент времени (как это было сделано в loc. cit.), поскольку волновая функция есть тогда функция преобразования, связывающая все ρ, σ и x в этот частный момент времени с набором переменных, являющихся интегралами движения, как это требуется для общей интерпретации квантовой механики.

Прежде чем переходить к теории атомов с одним электроном, что было начато в loc. cit., мы дадим доказательство теоремы сохранения, утверждающей, что изменения вероятности того, что электрон находится в данном объеме

В течение данного времени, равно вероятности того, что он пересечет границу этой области. Это доказательство дополняет то, что было проделано в loc. cit., § 3, и является необходимой предпосылкой того заключения, что теория дает согласованные результаты, инвариантные относительно преобразования Лоренца.

§ 1. Теорема сохранения

Приведем сперва небольшое обобщение обычной волновой механики, потребное для тех случаев, когда гамильтониан не эрмитов. Пусть волновое уравнение, записанное в некоторых переменных q , есть

$$(H - W)\psi = 0. \quad (i)$$

Рассмотрим также уравнение

$$(\tilde{H} - \tilde{W})\psi = 0 \quad (ii)$$

или

$$(\tilde{H} + W)\psi = 0,$$

где символ \tilde{a} обозначает матрицу, полученную из матрицы a транспозицией строк и столбцов. Если ψ_m и φ_n — должным образом нормированные решения уравнений (i) и (ii) соответственно, относящиеся к состояниям m и n , то примем $\varphi_n \psi_m$ за соответствующий матричный элемент вероятности того, что q имеют определенные значения. Если гамильтониан H эрмитов, то \tilde{H} есть комплексно сопряженное к H (получаемое заменой i на $-i$) и решения (ii) суть просто комплексно сопряженные к решениям (i), так что в этом случае наша вероятность $\varphi_n \psi_m$ переходит в обычную, $\bar{\varphi}_n \psi_m$. Но в общем случае необходимо пользоваться в (ii) транспонированным гамильтонианом вместо комплексно сопряженного, чтобы обеспечить то свойство, что если φ_n, ψ_m изначально ортогональны или взаимно нормированы (т. е. $\int \varphi_n \psi_m dq = 1$), то они всегда останутся соответственно ортогональными или взаимно нормированными.

Наше волновое уравнение для электрона в электромагнитном поле есть

$$[-p_0 + e'A_0 + \rho_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} + e'\mathbf{A}) + \rho_3 mc]\psi = 0, \quad (3)$$

где $e' = e/c$. Гамильтониан здесь будет эрмитовым, если матричное представление для спиновых переменных выбрано так, что они эрмитовы. Однако если теперь приме-

нить преобразование Лоренца к этому волновому уравнению и выделить коэффициент при новом ρ_0 , то результирующий новый гамильтониан, вообще говоря, не будет больше эрмитовым, хотя, как показано в loc. cit., § 3, он может быть снова приведен к исходной эрмитовой форме с помощью канонического преобразования матричного представления для спиновых переменных. В последующей работе мы потребуем единого матричного представления спиновых переменных для всех систем отсчета, так что мы не можем предполагать эрмитовости гамильтониана и должны пользоваться описанным выше обобщением.

Уравнение, полученное транспозицией строк и столбцов (3), есть

$$[-\rho_0 + e' A_0 + \tilde{\rho}_1(\tilde{\sigma}, -\mathbf{p} + e' \mathbf{A}) + \tilde{\rho}_3 mc] \varphi = 0. \quad (4)$$

Вероятность на единицу объема того, что электрон находится в окрестности произвольной точки, дается, согласно сделанному выше предположению, произведением $\varphi\psi$, причем это произведение понимается в смысле суммы произведений каждой из четырех компонент φ (относящихся соответственно к четырем строкам или столбцам матриц ρ, σ) на соответствующую компоненту ψ . Мы должны доказать, что эта вероятность есть временная компонента 4-вектора и что дивергенция этого 4-вектора обращается в нуль.

Из (3) следует

$$[\rho_3(\rho_0 + e' A_0) + \rho_1 \rho_3(\sigma, \mathbf{p} + e' \mathbf{A}) + mc] \rho_3 \psi = 0,$$

или

$$\left[\gamma_0(\rho_0 + e' A_0) + \sum_{r=1,2,3} \gamma_r(\rho_r + e' A_r) + mc \right] \chi = 0, \quad (5)$$

где

$$\gamma_0 = \rho_3, \quad \gamma_r = \rho_1 \rho_3 \sigma_r, \quad \chi = \rho_3 \psi.$$

Уравнение (5) симметрично относительно четырех измерений пространства и времени и показывает, что $\gamma_0, -\gamma_1, -\gamma_2, -\gamma_3$ суть контравариантные компоненты 4-вектора. Если домножить (4) на $\tilde{\rho}_3$ слева, получим

$$\left[\tilde{\gamma}_0(-\rho_0 + e' A) + \sum_r \tilde{\gamma}_r(-\rho_r + e' A_r) + mc \right] \varphi = 0, \quad (6)$$

так как

$$\tilde{\gamma}_0 = \tilde{\rho}_3, \quad \tilde{\gamma}_r = \tilde{\sigma}_r \tilde{\rho}_3 \rho_1 = \tilde{\rho}_3 \tilde{\rho}_1 \tilde{\sigma}_r.$$

Оператор в этом уравнении есть в точности транспонированный оператор из (5). Вероятность на единицу объема

того, что электрон находится в некотором месте, задается теперь посредством

$$\varphi\psi = \varphi\rho_3\chi = \varphi\gamma_0\chi. \quad (7)$$

Здесь $\varphi\alpha\chi$ обозначает сумму произведений каждой компоненты φ на соответствующую компоненту $\alpha\chi$, где α — любая функция спиновых переменных, представленная матрицей с четырьмя строками и столбцами. (Обратим внимание, что вообще всегда $\varphi\alpha\chi = \chi\bar{\alpha}\varphi$.) Выражение (7) есть временная компонента 4-вектора, пространственные компоненты которого, именно

$$-\varphi\gamma_1\chi, \quad -\varphi\gamma_2\chi, \quad -\varphi\gamma_3\chi,$$

должны давать домноженную на $1/c$ вероятность того, что электрон в единицу времени пересекает единичную площадь, перпендикулярную соответственно каждой из трех осей.

Мы должны теперь показать, что дивергенция этого 4-вектора исчезает, т. е. что

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\varphi\gamma_0\chi) - \sum_r \frac{\partial}{\partial x_r} (\varphi\gamma_r\chi) = 0. \quad (8)$$

Умножая (5) на φ и (6) — на χ и вычитая их друг из друга, получим

$$\varphi \left[\gamma_0\rho_0 + \sum_r \gamma_r\rho_r \right] \chi + \chi \left[\tilde{\gamma}_0\rho_0 + \sum_r \tilde{\gamma}_r\rho_r \right] \varphi = 0,$$

что дает

$$\varphi \left[\gamma_0 \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \sum_r \gamma_r \frac{\partial}{\partial x_r} \right] \chi + \chi \left[\tilde{\gamma}_0 \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \sum_r \tilde{\gamma}_r \frac{\partial}{\partial x_r} \right] \varphi = 0,$$

или

$$\varphi \left[\gamma_0 \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \sum_r \gamma_r \frac{\partial}{\partial x_r} \right] \chi + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \gamma_0 \chi - \sum_r \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \gamma_r \chi = 0.$$

Это немедленно дает уравнение сохранения (8), так как здесь γ — постоянные матрицы.

§ 2. Принцип отбора

В loc. cit. было введено квантовое число j , определяющее величину результирующего момента электрона, движущегося в центральном поле сил; j может принимать как положительные, так и отрицательные целые значения.

Было также показано, что, скажем, магнитное квантовое число $u = M_z/h$, определяющее компоненту полного момента в избранном направлении, принимает полуцелые нечетные значения от $-|j| + 1/2$ до $|j| - 1/2$. Состояние $j = 0$, таким образом, исключается, и вес любого состояния j есть $2|j|$. Уравнение, определяющее уровни энергии, т. е. уравнение (25) или (26), включает j только в комбинации $j(j+1)$, исключая лишь последний член, представляющий спиновые поправки. Поэтому два значения j , которые приводят к одному значению $j(j+1)$, образуют спиновый дуплет так, что $j = j'$ и $j = -(j' + 1)$ образуют спиновый дуплет, если $j > 0$. Связь между значениями j и обычными обозначениями щелочных спектров дается следующей схемой:

$$j = \begin{array}{ccccccc} -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & -4 \dots \\ & S & \underbrace{P} & \underbrace{D} & \underbrace{F} & & \end{array}$$

В настоящей теории нет азимутального квантового числа k и орбита электрона в атоме определяется только тремя квантовыми числами: n , j , u . На этом основании можно было бы ожидать, что правила отбора, относительная интенсивность линий мультиплета и т. п., в обычном определении которых k играет важную роль, будут в настоящей теории другими, однако мы увидим, что они оказываются в точности такими же.

Определим сперва правила отбора для j . Воспользуемся с этой целью следующими двумя теоремами:

(i) Если динамическая переменная X антикоммутирует с j , то все ее матричные элементы отвечают переходам типа $j \rightarrow -j$.

(ii) Если динамическая переменная Y удовлетворяет условию

$$[[Y, j\hbar], j\hbar] = -Y, \quad (9)$$

то все ее матричные элементы отвечают переходам типа $j \rightarrow j \pm 1$.

Для доказательства (i) заметим, что условие $jX + Xj = 0$ дает

$$j' \cdot X(j'j'') - X(j'j'') \cdot j'' = 0,$$

или

$$(j' + j'') \cdot X(j'j'') = 0.$$

Значит, $X(j'j'') = 0$, исключая случай $j'' = -j'$.

Доказательство (ii), включающее угловые переменные, было дано в одной из предыдущих статей¹⁾. Простое доказательство, аналогичное предыдущему для (i), состоит в следующем. Уравнение (9) дает

$$Yj^2 - 2jYj + j^2Y = Y$$

или

$$Y(j'j'') \cdot j''^2 - 2j' \cdot Y(j'j'') \cdot j'' + j'^2 \cdot Y(j'j'') = Y(j'j'').$$

Следовательно, $Y(j'j'') = 0$, исключая случай

$$j''^2 - 2j'j'' + j'^2 = 1,$$

т. е. когда

$$j'' = j' \pm 1.$$

Сосчитаем теперь $[[x_3, jh], jh]$. Определение j есть

$$jh = \rho_3 \{(\sigma, m) + h\}.$$

Значит,

$$[x_3, jh] = \rho_3 \{ \sigma_1 [x_3, m_1] + \sigma_2 [x_3, m_2] \} = \rho_3 (\sigma_1 x_2 - \sigma_2 x_1), \quad (10)$$

так что

$$[[x_3, jh], jh] = [\sigma_1 x_2 - \sigma_2 x_1, (\sigma, m)].$$

Далее,

$$ih [\sigma_1, (\sigma, m)] = \sigma_1 (\sigma, m) - (\sigma, m) \sigma_1 = 2i (\sigma_3 m_2 - \sigma_2 m_3),$$

или

$$1/2 h [\sigma_1, (\sigma, m)] = \sigma_3 m_2 - \sigma_2 m_3,$$

и аналогично

$$1/2 h [\sigma_2, (\sigma, m)] = \sigma_1 m_3 - \sigma_2 m_1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 1/2 h [[x_3, jh], jh] &= (\sigma_3 m_2 - \sigma_2 m_3) x_2 + \\ &+ 1/2 h \sigma_1 (\sigma_3 x_1 - \sigma_1 x_3) - (\sigma_1 m_3 - \sigma_3 m_1) x_1 - 1/2 h \sigma_2 (\sigma_2 x_3 - \sigma_3 x_2) = \\ &= \sigma_3 (m, x) - m_3 (\sigma, x) + 1/2 h \{ -\sigma_3 (\sigma, x) - x_3 \} = \\ &= M_3 (\sigma, x) - 1/2 h x_3, \end{aligned}$$

так что

$$[[x_3, jh], jh] = -2u (\sigma, x) - x_3.$$

Итак, x_3 не совсем удовлетворяет условию, которому удовлетворяет Y в (9), вследствие появления дополнительного члена $-2u (\sigma, x)$. Однако этот член антикоммутирует

¹⁾ Proc. Roy. Soc. A.—1926.—V. 111.—P. 281, § 3.

с j . Если мы теперь составим выражение $x_3 - cu(\sigma, x)$, где c — какая-либо величина, коммутирующая с j , то мы можем выбрать c так, чтобы это выражение в точности удовлетворяло тому условию, которому удовлетворяет Y в (9). Получим на самом деле

$$[[x_3 - cu(\sigma, x), jh], jh] = -2u(\sigma, x) - x_3 + cu \cdot 4j^2(\sigma, x) = \\ = -\{x_3 - cu(\sigma, x)\},$$

если c выбрано так, что $-2 + 4j^2c = c$, т. е.

$$c = \frac{1}{2(j^2 - 1/4)}$$

Следовательно, x_3 может быть выражено через сумму двух членов:

$$\frac{u}{2(j^2 - 1/4)}(\sigma, x) \quad \text{и} \quad x_3 - \frac{u}{2(j^2 - 1/4)}(\sigma, x),$$

из которых первый антикоммутирует с j и потому содержит лишь матричные элементы, отвечающие переходам типа $j \rightarrow -j$, в то время как второй удовлетворяет условию, которому Y удовлетворяет в (9) и, следовательно, содержит лишь матричные элементы, отвечающие переходам типа $j \rightarrow j \pm 1$. Подобные результаты имеют место для x_1 и x_2 . Значит, правило отбора для j есть

$$j \rightarrow -j \quad \text{или} \quad j \rightarrow j \pm 1.$$

Итак, из состояния с $j=2$ возможны переходы в состояния с $j=1, -2$ или 3 . Сравнивая это правило отбора с приведенной выше схемой, связывающей значения j с обозначениями S, P, D , мы видим, что оно в точности эквивалентно двум правилам отбора для j и k в обычной теории и, следовательно, согласуется с экспериментом.

§ 3. Относительные интенсивности линий мультиплетта

Относительные интенсивности разных компонент, на которые расщепляется линия в слабом магнитном поле, должны быть в этой теории такими же, как и в прежних теориях, поскольку она опирается только на перестановочные (*Vertauschungs*) соотношения, связывающие координаты x_r с компонентами полного момента M_r , которые переносятся в настоящую теорию без изменений. Поэтому для определения относительных интенсивностей линий мультиплетта достаточно рассмотреть только одну зема-

нову компоненту каждой линии — скажем, ту компоненту, для которой $\Delta u = 0$, т. е. компоненту, происходящую из x_3 .

Мы определим матричные элементы x_3 , выраженные матрицами в таком представлении, в котором r , j и u диагональны. x_3 диагональна (т. е. коммутирует) по всем этим переменным, за исключением j . Та часть x_3 , которая приводит к переходам $j \rightarrow -j$, есть, как мы видели,

$$\frac{u}{2(j^2 - 1/4)} (\sigma, x) = \frac{u}{2(j^2 - 1/4)} \epsilon \rho_1 r, \quad (11)$$

если воспользоваться ϵ , введенным в loc. cit., § 6. Величина $\epsilon \rho_1$ антикоммутирует с j , так что она может содержать лишь матричные элементы типа $\epsilon \rho_1(j, -j)$, а из условия $(\epsilon \rho_1)^2 = 1$ получается

$$|\epsilon \rho_1(j, -j)| = 1.$$

Значит,

$$|x_3(j, -j)| = \frac{u}{2(j^2 - 1/4)} r |\epsilon \rho_1(j, -j)| = \frac{u}{2(j^2 - 1/4)} r. \quad (12)$$

Опять же из (10) получаем

$$\begin{aligned} \{x_3 - i[x_3, jh]\} \{x_3 + i[x_3, jh]\} &= \\ &= \{x_3 - i\rho_3(\sigma_1 x_2 - \sigma_2 x_1)\} \{x_3 + i\rho_3(\sigma_1 x_2 - \sigma_2 x_1)\} = \\ &= x_3^2 + (\sigma_1 x_2 - \sigma_2 x_1)^2 = r^2, \end{aligned}$$

что дает

$$\{(j+1)x_3 - x_3 j\} \{x_3(j+1) - jx_3\} = r^2.$$

Если мы теперь приравняем (j, j) -матричные элементы обеих сторон этого равенства, то в левой стороне получим сумму трех членов, а именно $(j, -j)$ -матричный элемент первой фигурной скобки, умноженный на $(-j, j)$ -элемент второй, $(j, j+1)$ -элемент первой, умноженный на $(j+1, j)$ -элемент второй и $(j, j-1)$ -элемент первой, умноженный на $(j-1, j)$ -элемент второй. Второй из этих трех членов исчезает, и остается

$$(2j+1)^2 |x_3(j, -j)|^2 + 4 |x_3(j, j-1)|^2 = r^2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |x_3(j, j-1)|^2 &= \\ &= \frac{1}{4} r^2 \left\{ 1 - \frac{u^2}{(j-1/2)^2} \right\} = \frac{1}{4} r^2 \frac{(j+u-1/2)(j-u-1/2)}{(j-1/2)^2}. \quad (13) \end{aligned}$$

Заменяя j на $-j$, получим

$$|x_3(-j, -j-1)|^2 = \frac{1}{4} r^2 \frac{(j+u+1/2)(j-u+1/2)}{(j+1/2)^2}. \quad (14)$$

Три матричных элемента x_3 (12), (13) и (14) связаны с тремя компонентами мультиплетта, образованного комбинацией двух дублетов. Отношение этих матричных элементов остается, в первом приближении, неизменным при преобразовании от представления, где диагональны r, j, u, ρ_3 , к представлению, в котором диагонален гамильтониан, и, следовательно, дает относительные интенсивности компонент Зеемана с $\Delta u = 0$ линий комбинационного дублета. Эти отношения находятся в согласии с отношениями прежних теорий, основанных на модели вращающегося электрона.

§ 4. Эффект Зеемана

При наличии однородного магнитного поля интенсивности H в направлении оси x_3 магнитные потенциалы можно выбрать в виде

$$A_1 = -\frac{1}{2}Hx_2, \quad A_2 = \frac{1}{2}Hx_1, \quad A_3 = 0.$$

Дополнительные члены в гамильтониане F будут тогда

$$\Delta F = \rho_1 e' (\sigma, A) = -\frac{1}{2}He' \rho_1 (\sigma_1 x_2 - \sigma_2 x_1).$$

Из (10) следует, что $\rho_3 (\sigma_1 x_2 - \sigma_2 x_1)$ или $(\sigma_1 x_2 - \sigma_2 x_1)$, содержат, подобно x_3 , лишь матричные элементы типа $(j, -j)$ или $(j, j \pm 1)$. Далее, ρ_1 антикоммутирует с j и, следовательно, содержит лишь матричные элементы типа $(j, -j)$. Значит, ΔF содержит только матричные элементы типа (j, j) или $(j, -j \pm 1)$.

В лос. cit. § 6 было найдено (см. уравнение (24)), что гамильтониан можно выразить в виде

$$F \equiv p_0 + V + \varepsilon p_r + i\varepsilon \rho_3 \hbar / r + \rho_3 mc. \quad (15)$$

Из (10) следует, что $(\sigma_1 x_2 - \sigma_2 x_1)$ антикоммутирует с (σ, x) , а, значит, и с ε . Поэтому, если мы положим

$$\Delta F = i\hbar \varepsilon \rho_3 \eta r,$$

так что

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{He}{ch} \frac{\varepsilon \rho_3 (\sigma_1 x_2 - \sigma_2 x_1)}{r},$$

то η будет коммутировать с ε . Далее, η коммутирует с ρ_3 , r и p_r , так что η коммутирует со всеми переменными, входящими в (15), исключая j . Если мы теперь выразим η как матрицу в j , то тем самым получим выражение для ΔF через переменные, фигурирующие в (15). Из (10) и

(13) получаем

$$|\rho_3(\sigma_1 x_2 - \sigma_2 x_1)(j, j-1)|^2 = |x_3(j, j-1)|^2 = \\ = \frac{1}{4} r^2 \frac{(j+u-1/2)(j-u-1/2)}{(j-1/2)^2},$$

и подобным образом

$$|\rho_3(\sigma_1 x_2 - \sigma_2 x_1)(j, j+1)|^2 = |x_3(j, j+1)|^2 = \\ = \frac{1}{4} r^2 \frac{(j+u+1/2)(j-u+1/2)}{(j+1/2)^2}.$$

Мы видели, что матричные элементы ε_{ρ_1} , которые все относятся к типу $(j, -j)$, должны иметь единичный модуль. Поэтому

$$\left. \begin{aligned} |\eta(j, -j-1)|^2 &= \\ &= \left(\frac{He}{2chr}\right)^2 |i\varepsilon_{\rho_1}(j, -j)|^2 |\rho_3(\sigma_1 x_2 - \sigma_2 x_1) \times \\ &\quad \times (-j, -j-1)|^2 = \\ &= \left(\frac{He}{4ch}\right)^2 \frac{(j+u+1/2)(j-u+1/2)}{(j+1/2)^2} \end{aligned} \right\} (16)$$

и подобным образом

$$|\eta(j, -j+1)|^2 = \left(\frac{He}{4ch}\right)^2 \frac{(j+u-1/2)(j-u-1/2)}{(j-1/2)^2}$$

Опять же из (10) и (11)

$$\rho_3(\sigma_1 x_2 - \sigma_2 x_1)(-j, j) = -2ij \cdot x_3(-j, j) = \\ = -\frac{u}{(j^2-1/4)} i r j \cdot (\varepsilon_{\rho_1})(-j, j),$$

так что

$$\eta(j, j) = \frac{He}{2ch} \frac{uj}{j^2-1/4}. \quad (17)$$

Если мы теперь выпишем полностью, как в loc. cit., волновое уравнение, соответствующее (15), и включим дополнительный член ΔF , то получим

$$[(F + \Delta F)\psi]_{\alpha} = (\rho_0 + V)\psi_{\alpha} - \hbar \frac{\partial}{\partial r} \psi_{\beta} - \\ - \left(\frac{j}{r} + \eta r\right) \hbar \psi_{\beta} + mc\psi_{\alpha} = 0,$$

$$[(F + \Delta F)\psi]_{\beta} = (\rho_0 + V)\psi_{\beta} + \hbar \frac{\partial}{\partial r} \psi_{\alpha} - \\ - \left(\frac{j}{r} + \eta r\right) \hbar \psi_{\alpha} - mc\psi_{\beta} = 0,$$

где η — теперь оператор, действующий на ψ_{α} и ψ_{β} и коммутирующий со всем, кроме j . Исключая ψ_{α} , получим

отсюда уравнение, соответствующее (25) в loc. cit.,

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi_\beta + \left[\frac{(p_0 + V)^2 - m^2 c^2}{h^2} - \frac{j(j+1)}{r^2} + \eta - \eta j - j\eta - \eta^2 r^2 \right] \psi_\beta - \frac{1}{p_0 + V + mc} \frac{\partial V}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r} + \eta r \right] \psi_\beta = 0.$$

Можно пренебречь членом $\eta^2 r^2$, пропорциональным квадрату напряженности поля, а также членом ηr в последней скобке, который по порядку величины пропорционален напряженности поля, умноженной на спиновую поправку. Единственный эффект поля в первом порядке — это добавка членов $\eta - \eta j - j\eta$ в первой скобке. Эта скобка может теперь быть записана в виде

$$\left[\frac{2mE}{h^2} + \frac{E^2}{c^2 h^2} + \frac{2(E + mc^2)}{ch^2} V + \frac{V^2}{h^2} - \frac{j(j+1)}{r^2} + \eta - \eta j - j\eta \right], \quad (18)$$

где E — уровень энергии, равный $p_0 c - mc^2$.

Если поле слабо по сравнению с расщеплением дублета, то можно получить первую поправку к изменению энергетических уровней, пренебрегая недиагональными матричными элементами в ΔF или в η . Дополнительные члены $\eta - \eta j - j\eta$ в (18) превратятся тогда в константу, а не в оператор, а именно в константу

$$-(2j-1)\eta(j, j) = -\frac{He}{ch} \frac{uj}{j+1/2}$$

из (17). Энергетические уровни будут понижены на эту константу, умноженную на $h^2/2m$, если мы пренебрежем тем, что E появляется в (18) еще и в других местах, кроме как в члене $2mE/h^2$, что будет равносильно пренебрежению взаимодействием магнитного поля с релятивистским изменением массы в зависимости от скорости. Возрастание уровней энергии, вызванное магнитным полем, есть, таким образом,

$$\frac{He}{2mc} \frac{j}{j+1/2} uh = \omega g uh,$$

где ω — ларморова частота $He/2mc$, а g — фактор расщепления Ланде, принимающий значения

$$g = j \left/ \left(j + \frac{1}{2} \right) \right.$$

Для последовательности значений j : $-1, 1, -2, 2, -3, \dots$ множитель g принимает значения $2, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \dots$ в соответствии с формулой Ланде для щелочных металлов.

Рассмотрим теперь случай магнитного поля, сильного по сравнению с расщеплением дублета, но слабого по сравнению с разделением термов различных серий. Для этого требуется принять во внимание матричные элементы η типа $\eta(j, -j-1)$ с $j > 0$, хотя элементами типа $\eta(-j, -j+1)$ можно по-прежнему пренебречь. Понижение энергетических уровней будет теперь приближенно равно $h^2/2m$, умноженному на то или иное характеристическое значение $\eta - \eta j - j\eta$ в (18).

Эти характеристические значения суть корни ξ уравнения

$$\begin{vmatrix} (\eta - \eta j - j\eta)(j, j) - \xi & (\eta - \eta j - j\eta)(j, -j-1) \\ (\eta - \eta j - j\eta)(-j-1, j) & (\eta - \eta j - j\eta)(-j-1, -j-1) - \xi \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} -(2j-1) \cdot \eta(j, j) - \xi & 2\eta(j, -j-1) \\ 2\eta(-j-1, j) & (2j+3) \cdot \eta(-j-1, -j-1) - \xi \end{vmatrix} = 0.$$

Это дает с помощью (16) и (17)

$$\xi^2 + \frac{He}{ch} \left[\frac{uj}{j+1/2} + \frac{u(j+1)}{j+1/2} \right] \xi + \left(\frac{He}{ch} \right)^2 \left[\frac{u^2 j(j+1)}{(j+1/2)^2} - \frac{(j+1/2)^2 - u^2}{4(j+1/2)^2} \right] = 0,$$

что сводится к

$$\xi^2 + \frac{He}{ch} 2u\xi + \left(\frac{He}{ch} \right)^2 \left(u^2 - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Отсюда

$$\xi = -\frac{He}{ch} \left(u \pm \frac{1}{2} \right).$$

Возрастание уровней энергии за счет магнитного поля есть, таким образом,

$$-\frac{h^2}{2m} \xi = \frac{h^2}{2m} \frac{He}{ch} \left(u \pm \frac{1}{2} \right) = \omega \left(u \pm \frac{1}{2} \right) h,$$

в согласии с теорией вращающегося электрона для эффекта Пашена — Бака.

Можно было бы ожидать, что при более сильных магнитных полях матричные элементы $(j, -j+1)$ оператора η тоже вступят в игру и приведут к интерференции между зеемановыми структурами термов, квантовые числа которых k в обычных обозначениях различаются на 2. Однако матричные элементы $(j, -j+1)$ оператора $\eta - \eta j - j\eta$ исчезают при произвольных η , так что никакого эффекта такого рода быть не может.

7. ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОНОВ И ПРОТОНОВ¹⁾

Proceedings of the Royal Society
A vol. 126 (1930), pp. 360—365

A THEORY OF ELECTRONS AND PROTONS

By P. A. M. DIRAC, St. John's College, Cambridge

(Communicated by R. H. Fowler, F. R. S — Received December, 1929)

§ 1. Природа трудности, связанной с отрицательными энергиями

Хотя релятивистская квантовая теория электрона, движущегося в заданном электромагнитном поле, добилась успеха в предсказании спиновых свойств электрона, она содержит серьезную трудность, которая указывает на необходимость некоторого существенного изменения теории. Без такого изменения нельзя считать, что теория правильно описывает природу. Эта трудность связана с тем фактом, что волновое уравнение вида

$$\left[\frac{W}{c} + \frac{e}{c} A_0 + \rho_1 \left(\sigma, \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \rho_3 mc \right] \psi = 0 \quad (1)$$

имеет наряду с желательными решениями, для которых кинетическая энергия электрона положительна, такое же количество нежелательных решений с отрицательной кинетической энергией электронов, не имеющих, казалось бы, физического смысла. Так, если мы возьмем случай постоянного электромагнитного поля, то уравнение (1) будет допускать периодические решения вида

$$\psi = u e^{-iEt/\hbar}, \quad (2)$$

где u не зависит от t и представляет стационарное состояние, E — полная энергия состояния, включая релятивистский член mc^2 . Тогда наряду с решениями (2) с положительными значениями E будут существовать также же

¹⁾ Перевод с английского В. П. Шелеста.

решения с отрицательными значениями E . Фактически, если взять матричное представление операторов $\rho_1\sigma_1$, $\rho_1\sigma_2$, $\rho_1\sigma_3$, ρ_3 , в котором все матричные элементы вещественны, то комплексное сопряжение от любого решения уравнения (1) будет решением волнового уравнения, полученного из (1) изменением знака потенциалов A , и либо исходная волновая функция, либо комплексно сопряженная должна будет соответствовать отрицательному значению E .

Указанная трудность не является особенностью квантовой теории электрона. Это общая трудность, появляющаяся во всех релятивистских теориях, в том числе и в классической. Она возникает из того фундаментального факта, что в релятивистском уравнении Гамильтона классической теории

$$\left(\frac{W}{c} + \frac{e}{c} A_0\right)^2 - \left(p + \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)^2 - m^2 c^2 = 0 \quad (3)$$

существует неопределенность в выборе знака W , или, вернее, знака $W + eA_0$. Хотя оператор, действующий на волновую функцию в уравнении (1), линеен относительно W , он еще, грубо говоря, эквивалентен левой части уравнения (3), и неопределенность знака остается. Эта трудность несущественна в классической теории, поскольку там динамические переменные всегда изменяются непрерывно. Поэтому будет существовать резкое различие между теми решениями уравнений движения, для которых $W + eA_0 \geq mc^2$, и теми, для которых $W + eA_0 \leq -mc^2$, и мы можем последние просто игнорировать.

Нельзя, однако, так просто обойти эту трудность в квантовой теории. Правда, в случае постоянного электромагнитного поля мы можем провести различие между решениями уравнения (1) в форме (2) с положительными или отрицательными значениями E и можем утверждать, что только первые имеют физический смысл (что мы фактически и делаем, когда применяем теорию к определению энергетических уровней атома водорода). Но возмущение, приложенное к системе, может вызвать переходы между состояниями разных типов. В общем случае произвольно изменяющегося электромагнитного поля нельзя разделить решения волнового уравнения так строго и быстро на решения, отвечающие положительной кинетической энергии, и решения, отвечающие отрицательной кинетической энергии. Более того, в точной квантовой теории, в которой электромагнитное поле также подчиняется

квантовым законам, могут иметь место переходы, при которых энергия электрона изменяется с положительного значения на отрицательное даже в отсутствие любого внешнего поля. При этом избыток энергии, величиной по крайней мере $2mc^2$, испускается спонтанно в виде излучения. (Законы сохранения энергии и импульса требуют, чтобы в таком процессе одновременно создавались по крайней мере два световых кванта.) Таким образом, мы не можем игнорировать состояния с отрицательной энергией, если хотим сохранить однозначность в интерпретации теории.

Рассмотрим более подробно волновые функции, представляющие состояния с отрицательной энергией. Если взять суперпозицию таких волновых функций, образующую волновой пакет, движение этого пакета будет проходить вдоль классической траектории, задаваемой гамильтонианом (3) с отрицательным $W + eA_0$. Легко видеть, что такая траектория есть возможная траектория для обычного электрона (с положительной энергией), движущегося в электромагнитном поле противоположного знака, или для электрона с зарядом $+e$ (и положительной энергией), движущегося в исходном электромагнитном поле. Таким образом, *электрон с отрицательной энергией движется во внешнем поле так, как будто он несет положительный заряд.*

Этот вывод привел некоторых авторов¹⁾ к подозрению о существовании связи между электроном с отрицательной энергией и протоном, т. е. ядром атома водорода. Нельзя, однако, просто утверждать, что электрон с отрицательной энергией *и есть* протон, так как это привело бы к следующим парадоксам:

(i) Переход электрона из состояния с положительной энергией в состояние с отрицательной энергией можно было бы интерпретировать как переход электрона в протон, что нарушало бы закон сохранения электрического заряда.

(ii) Хотя электрон с отрицательной энергией и движется во внешнем поле так, словно он имеет положительный заряд, из рассмотрения закона сохранения импульса легко видеть, что поле, которое он создает, должно соответствовать наличию у него отрицательного заряда. Например, электрон с отрицательной энергией будет отталкивать обычный электрон с положительной энергией, хотя

¹⁾ См., например, Weyl // Zs. Phys. — 1929. — Bd 56. — S. 332.

сам он будет притягиваться электроном с положительной энергией.

(iii) Электрон с отрицательной энергией будет иметь тем меньшую энергию, чем быстрее он движется, и, чтобы остановиться, он должен поглотить энергию. Никаких частиц такой природы никогда не наблюдалось.

Более внимательное рассмотрение условий, которые, как мы ожидаем, должны выполняться в реальном мире, подсказывает, что связь между протонами и электронами с отрицательной энергией должна иметь несколько другую основу, которая, как мы увидим, устраняет все упомянутые выше трудности.

§ 2. Решение проблемы отрицательных энергий

Наиболее стабильные состояния электрона (т. е. состояния с наименьшей энергией) суть состояния с отрицательной энергией и очень высокой скоростью. Все электроны в мире будут стремиться перейти в эти состояния с испусканием излучения. Принцип запрета Паули будет, однако, вступать в действие и препятствовать тому, чтобы более чем один электрон переходил в каждое такое состояние. Предположим, что в мире существует так много электронов, что все наиболее стабильные состояния заняты, или, более точно, что *все состояния с отрицательной энергией заняты, за исключением, быть может, нескольких состояний с небольшой скоростью*. Любые электроны с положительной энергией тогда будут иметь очень малую вероятность перескочить в состояния с отрицательной энергией и поэтому будут вести себя подобно электронам, поведение которых наблюдается в лаборатории. Мы будем иметь бесконечное число электронов с отрицательной энергией, и даже бесконечное их число в единице объема повсюду во Вселенной, но если их распределение абсолютно однородно, следует ожидать, что они полностью ненаблюдаемы. *Можно надеяться наблюдать только малые отклонения от полной однородности, вызванные тем, что некоторые состояния с отрицательной энергией не заняты.*

Рассмотрим свойства таких вакантных состояний, или «дырок». Задача аналогична задаче о рентгеновских уровнях в многоэлектронном атоме. Согласно обычной теории рентгеновских уровней дырка, которая образуется, если удалить один из внутренних электронов атома, может быть описана как некоторая орбита, а именно дырка пред-

ставляется как орбита, на которой находился недостающий электрон перед тем, как его удалили. Такое описание может быть оправдано в рамках квантовой механики, если только орбита рассматривается не в смысле теории Бора, а как нечто такое, что может быть представлено, отвлекаясь от спина, трехмерной волновой функцией. Таким образом, дырка, или вакансия в области, которая в остальном полностью заполнена электронами, — почти то же самое, что единственный электрон в области, где другие электроны отсутствуют.

В случае рентгеновских спектров дыркам следует приписывать отрицательную энергию, так как чтобы заставить одну из них исчезнуть (т. е. заполнить ее), необходимо добавить обычный электрон с положительной энергией. Однако для дырок в нашем распределении электронов с отрицательной энергией ситуация как раз противоположная. Эти дырки будут обладать положительной энергией и, следовательно, в этом отношении будут подобны обычным частицам. Более того, движение такой дырки во внешнем электромагнитном поле будет таким же, как движение электрона с отрицательной энергией, который мог бы заполнить ее, и поэтому будет соответствовать заряду $+e$. Таким образом, мы пришли к предположению, что *дырки в распределении электронов с отрицательными энергиями суть протоны*. Когда электрон положительной энергии падает в дырку и заполняет ее, мы имеем пару электрон — протон, исчезающую с испусканием излучения.

Трудность возникает при рассмотрении поля, вызванного распределением электронов с отрицательной энергией. Существует бесконечная плотность электричества, которая согласно уравнению Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (4)$$

должна была бы создавать электрическое поле с бесконечной дивергенцией. Кажется естественным, однако, интерпретировать ρ в уравнении Максвелла (4) как отклонение от нормального состояния электризации Вселенной, в котором, согласно нашей теории, все электронные состояния с отрицательной энергией заняты, а все состояния с положительной энергией свободны. Такая плотность ρ будет складываться из заряда $-e$, возникающего от каждого занятого состояния с положительной энергией, и заряда $+e$, возникающего от каждого не занятого состояния с отрицательной энергией. Таким образом, поле, создаваемое протоном, будет соответствовать его заряду $+e$.

Таким путем мы можем преодолеть три трудности, отмеченные в конце предыдущего раздела. Нам необходимо постулировать только один фундаментальный сорт частиц вместо двух, электрона и протона, требовавшихся ранее. Явная тенденция всех частиц перейти в состояние с наименьшей энергией приводит к появлению всех *различных* объектов в природе, обладающих положительной энергией.

Может ли предлагаемая теория объяснить большую асимметрию между электронами и протонами, которая проявляется в различии масс и в способности протонов объединяться и образовывать более тяжелые атомные ядра? Очевидно, что эта теория предсказывает большую степень симметрии между электронами и протонами. Мы можем поменять их ролями и утверждать, что протоны — реальные частицы, а электроны — просто дырки в распределении протонов с отрицательной энергией. Эта симметрия, однако, не является математически совершенной, если учесть взаимодействие между электронами. Если этим взаимодействием пренебречь, то гамильтониан всей системы будет иметь форму $\sum H_a$, где H_a — гамильтониан или энергия электрона в состоянии a , и сумма берется по всем занятым состояниям. Он только на константу (т. е. на величину, не зависящую от того, какие состояния заняты) отличается от суммы $\sum (-H_a)$, взятой по всем не занятым состояниям. Таким образом, мы получим формально такую же динамическую систему, если будем рассматривать не занятые состояния или протоны, каждый из которых дает в гамильтониан вклад $-H_a$. С другой стороны, если учесть взаимодействие между электронами, в гамильтониане возникнет дополнительный член вида $\sum V_{ab}$, где сумма берется по всем парам (a, b) занятых состояний, и эта сумма не может быть эквивалентна какой-либо сумме по парам не занятых состояний. Следовательно, взаимодействие приводит к существенно другому гамильтониану, если рассматривать протоны как реальные частицы, занимающие состояния.

Следствия этой симметрии не очень легко сосчитать релятивистским образом, но можно надеяться, что они в итоге приведут к объяснению различия масс протона и электрона. Возможно, что для получения этого результата необходима более совершенная теория взаимодействия, основанная, например, на проведенном Эддингтоном¹⁾ вычислении постоянной тонкой структуры e^2/hc .

¹⁾ *Eddington* // Proc. Roy. Soc. A. — 1929. — V, 122. — P. 358.

§ 3. Применение к рассеянию

В качестве простейшего применения изложенных идей рассмотрим задачу рассеяния излучения на свободном или связанном электроне. Процесс рассеяния согласно теории следует рассматривать как процесс двух последовательных переходов, включающих сначала поглощение фотона электроном с одновременным перескоком электрона в любое возможное состояние, и затем испускание фотона электроном, переходящим в конечное состояние, или наоборот, сначала испускание, а затем поглощение. Поэтому мы должны рассматривать одновременно три состояния всей системы: *начальное состояние* с падающим фотоном и электроном в начальном состоянии; *промежуточное состояние*, в котором есть либо два фотона, либо на одного, а электрон находится в любом возможном состоянии; и *конечное состояние* с рассеянным фотоном и электроном в конечном состоянии. Начальное и конечное состояния всей системы должны иметь одну и ту же полную энергию, а энергия промежуточного состояния, существующего в течение очень короткого времени, может заметно отличаться.

Возникает вопрос, как следует интерпретировать такие процессы рассеяния, в которых промежуточное состояние есть состояние с отрицательной энергией электрона. В соответствии с изложенными ранее соображениями эти промежуточные состояния не имеют никакого реального физического смысла, поэтому неясно, следует ли включать в формулу для коэффициента рассеяния процессы рассеяния, идущие через эти состояния. Это создает серьезную трудность, так как в некоторых практически важных случаях почти все рассеяние возникает за счет промежуточных состояний с отрицательной энергией электрона¹⁾. Фактически, для свободного электрона и излучения низкой частоты, когда справедлива классическая формула, все рассеяние целиком обусловлено такими промежуточными состояниями.

Согласно теории, предложенной в данной работе, скачок электрона в состояние с отрицательной энергией абсолютно запрещен принципом запрета, поэтому процессы двукратного перехода с промежуточными состояниями, в которых энергия электрона отрицательна, должны быть исключены. Однако теперь существуют процессы с двумя

¹⁾ Я признателен И. Уоллеру (*I. Waller*) за то, что он обратил мое внимание на эту трудность.

переходами и другого рода, а именно такие, в которых сначала один из (ненаблюдаемых) электронов с отрицательной энергией перескакивает в требуемое конечное состояние с поглощением (или испусканием) фотона, а затем исходный электрон с положительной энергией скатывается в дырку, образованную первым переходом, с испусканием (или поглощением) фотона. Такие процессы приводят к конечному состоянию всей системы, неотличимому от конечного состояния, возникшего в результате более прямых процессов, в которых один и тот же электрон совершает два последовательных перехода. Эти процессы нового типа как раз заменяют те более прямые процессы, которые исключаются из-за того, что в промежуточных состояниях электрон имеет отрицательную энергию. В этих двух случаях матричные элементы, определяющие вероятности переходов, одинаковы, хотя переходы происходят в обратном порядке. Таким способом можно оправдать использование старых формул для рассеяния, в которых никакие промежуточные состояния не исключаются.

8. К АННИГИЛЯЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ И ПРОТОНОВ ¹⁾

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society
A vol. XXVI (1930), part III, pp. 361—375

ON THE ANNIHILATION OF ELECTRONS AND PROTONS

By P. A. M. DIRAC, Ph. D., St. John's College

(Received 26 March, read 19 May 1930)

§ 1. Введение

У электрона, согласно релятивистской квантовой теории, есть два различных типа состояний движения, а именно такие, в которых его кинетическая энергия положительна, и такие, в которых она отрицательна. Разумеется, лишь первые могут отвечать реальным электронам, наблюдаемым в лаборатории. Вторые, однако, также должны иметь физический смысл, так как теория предсказывает, что будут происходить переходы из одних в другие. Недавно ²⁾ было сделано предложение, что следовало бы принять, что почти все возможные состояния с отрицательной энергией заполнены в соответствии с принципом исключения Паули в точности одним электроном, и что незаполненные состояния, или «дырки», с отрицательной энергией следовало бы рассматривать как протоны. Согласно этим представлениям, когда электрон с положительной энергией совершает переход в одно из незаполненных состояний с отрицательной энергией, происходит одновременное исчезновение электрона и протона, а их энергия испускается в виде электромагнитного излучения. Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы вычислить, сколько часто происходят такие процессы аннигиляции электронов и протонов.

Большое различие в массах протона и электрона образует неразрешенное затруднение существующей теории.

¹⁾ Перевод с английского В. П. Шелеста.

²⁾ Proc. Roy. Soc. A. — 1930. — V. 126. — P. 360. (Предыдущая статья этого сборника. — *Примеч. ред.*)

Такое большое различие связано, по-видимому, с взаимодействием между электронами, однако наши современные представления об этом взаимодействии не настолько адекватны, чтобы его учесть. Поэтому нам пока не остается ничего лучшего, как пренебречь этим взаимодействием вовсе, следовательно, работать в теории, в которой электрон и протон имеют одну и ту же массу. Это, безусловно, является серьезным недостатком нашей работы и предупреждает не придавать слишком большое физическое значение ее результату. И все же наши вычисления представляют интерес, так как они строго вытекают из основных принципов квантовой механики, а также потому, что они, по-видимому, составят основу для будущих вычислений, которые правильно учтут взаимодействие. Вместе с тем, наши вычисления дают обоснование формулы рассеяния Клейна и Нишины¹⁾, полученной этими авторами при помощи классических аналогий без строгого доказательства того, что они являются следствиями квантовой механики.

Из законов сохранения энергии и импульса легко увидеть, что электрон и протон не могут взаимно аннигилировать, излучив только один фотон. Должно излучаться по крайней мере два фотона. Процессы, в которых испускается более двух фотонов, будут происходить намного реже и здесь рассматриваться не будут.

Рассматриваемые нами процессы являются процессами *спонтанного излучения*, которые могут происходить без помощи какого-либо ранее существовавшего излучения. Для прямого вычисления вероятности протекания таких процессов необходимо применить квантовую механику к полю излучения. Это потребовало бы привлечения сложного математического аппарата, так как означало бы работу с динамической системой с бесконечным числом степеней свободы. Вместо этого удобнее вычислить вероятность соответствующего *вынужденного излучения*, а затем воспользоваться известным соотношением между вероятностями спонтанного и вынужденного излучения. При рассмотрении вероятностей вынужденного излучения квантовать поле не требуется, его можно рассматривать просто как внешнее возмущение с заданными значениями в каждой точке пространства-времени, и это приводит к существенному упрощению работы.

¹⁾ Klein and Nishina // Zs. Phys. — 1920. — Bd 52. — S. 853.

Таким образом, наша задача состоит в рассмотрении электрона, находящегося под одновременным взаимодействием двух падающих пучков излучения. Если частоты и направления движения этих пучков удовлетворяют определенному условию, то они будут индуцировать переходы электрона в состояния с отрицательной энергией, и мы сумеем вычислить вероятность перехода в единицу времени.

Обычный метод решения этой задачи с учетом спина электрона потребовал бы от нас сначала рассмотреть электрон с заданным направлением спина, получить вероятность перехода для такого электрона и затем усреднить по всем направлениям спина. Выбор заданного начального направления спина привносит в вычисления большую долю диссимметрии, не являющейся необходимой из-за усреднения в конце вычислений. Избежать этой диссимметрии и провести вычисления в изящной манере позволяет метод, который будет описан в следующем разделе.

§ 2. Методы решения задач в квантовой механике

Обычным методом рассмотрения задачи в квантовой механике является *метод волновых функций*, который состоит в нахождении волновой функции ($q' |$), представляющей требуемое состояние. Эта волновая функция должна удовлетворять уравнению Шредингера

$$ih \frac{d}{dt} (q' |) = \int (q' | H | q'') dq'' (q'' |), \quad (1)$$

где $(q' | H | q'')$ — матрица, представляющая гамильтониан. Комплексно сопряженная волновая функция $(| q')$ будет удовлетворять комплексно сопряженному уравнению

$$-ih \frac{d}{dt} (| q') = \int (| q'') dq'' (q'' | H | q'). \quad (2)$$

Если волновая функция надлежаще нормирована, то можно интерпретировать квадрат ее модуля, а именно, произведение $(q' |)(| q')$, как вероятность того, что q принимает значение q'^1 , и, более того, если ξ есть некоторая динамическая переменная, представленная матрицей $(q' | \xi | q'')$, то ее средним значением в рассматриваемом состоянии

¹⁾ Строго говоря, следовало бы говорить о вероятности того, что q принимает значение в единичной окрестности q' .

будет

$$\iint (q' | \xi | q'') dq'' (q'' | 1) (1 | q') dq'.$$

Несмотря на то, что этот метод волновых функций может применяться всегда, он неудобен для задач, в которых мы интересуемся не свойствами отдельного состояния, а усредненными свойствами большого числа состояний. Предположим, например, что мы хотим усреднить вероятность того, что q принимает значение q' , когда система находится в любом из состояний, общее число которых равно u . Нам следовало бы определить волновые функции $(q' | 1)$, $(q' | 2)$, ..., $(q' | u)$ для каждого из этих u состояний и затем взять среднее $u^{-1} \sum_r (q' | r) (r | q')$. Аналогично, чтобы получить среднее от ξ на этих u состояниях, нам следовало бы определить все волновые функции и образовать

$$u^{-1} \sum_r \iint (q' | \xi | q'') dq'' (q'' | r) (r | q') dq'.$$

Можно избежать трудностей, связанных с нахождением всех волновых функций, получая вместо них всего лишь одну матрицу, $u^{-1} \sum_r (q' | r) (r | q'')$, равную, скажем, $(q' | \rho | q'')$,

через которую выражаются эти средние. При таком способе мы с самого начала имеем дело с целым набором из u состояний. Можно считать, что этот набор образует ансамбль в смысле Гиббса. Тогда матрица $(q' | \rho | q'')$ представляет собой функцию динамических переменных, являющуюся квантовым аналогом плотности представляющих точек в фазовом пространстве при классическом рассмотрении гиббсова ансамбля¹⁾. С помощью (1) и (2) легко проверить, что скорость изменения этой матрицы дается уравнением

$$ih \frac{d}{dt} (q' | \rho | q'') = \\ = \int \{ (q' | H | q''') (q''' | \rho | q'') - (q' | \rho | q''') (q''' | H | q'') \} dq''',$$

или, в символической записи,

$$ih \dot{\rho} = H \rho - \rho H. \quad (3)$$

Метод плотности²⁾ для решения квантово-механических задач состоит в нахождении функции плотности ρ , удовле-

¹⁾ Gibbs // Proc. Cambr. Phil. Soc.—1929.—V. XXV.—P. 62.

²⁾ В настоящее время употребляется термин «метод матрицы плотности». — Примеч. пер.

творяющей надлежащим начальным условиям, непосредственно из уравнения движения (3). Общее решение этого уравнения движения соответствует ансамблю некоторых состояний, каждому из которых присвоен произвольный вес. Метод плотности удобнее метода волновых функций, когда число рассматриваемых состояний велико. Однако метод плотности имеет и один серьезный недостаток, ибо неизвестное в нем есть матрица, зависящая от вдвое большего, по сравнению с волновой функцией, числа переменных. Это приводит к тому, что решение уравнения (3) составляет в общем случае более сложную задачу, чем решение (1) или (2).

Есть, однако, третий метод, занимающий промежуточное положение среди двух предыдущих, в определенных случаях более удобный, чем каждый из них, и совмещающий преимущества обоих. Он состоит в нахождении *прямоугольной матрицы* ψ из n строк и m столбцов, где n — количество строк и столбцов в квадратной матрице H , m произвольно, а ψ должно удовлетворять уравнению того же вида, что и уравнение Шредингера (1), а именно

$$ih \frac{d}{dt} \psi = H\psi. \quad (4)$$

Произведение ψ и квадратной матрицы H , взятое в соответствии с обычным правилом матричного умножения, является другой матрицей с n строками и m столбцами, что и позволяет приравнять ее $d\psi/dt$. Пусть теперь φ — матрица, эрмитово сопряженная ψ , получающаяся заменой строк на столбцы и комплексным сопряжением каждого элемента. Таким образом, φ будет матрицей с m строками и n столбцами и будет удовлетворять уравнению

$$-ih \frac{d}{dt} \varphi = \varphi H. \quad (5)$$

Если теперь образовать произведение $\varphi\psi$, то оно будет матрицей из n строк и столбцов, т. е. квадратной матрицей, и будет удовлетворять уравнению

$$ih \frac{d}{dt} (\varphi\psi) = ih \frac{d\psi}{dt} \varphi + \varphi \left(ih \frac{d\varphi}{dt} \right) = H\varphi\psi - \varphi\psi H.$$

Это — в точности уравнение (3), где вместо ρ стоит $\varphi\psi$. Таким образом, *произведение любого решения (4) на решение эрмитово сопряженного уравнения (5) является решением (3)*.

Третий метод оказывается полезным, когда функцию плотности ρ , описывающую изучаемый ансамбль, можно

выразить в виде произведения $\psi\phi$, где m — число столбцов в ψ и строк в ϕ — значительно меньше n . В подобных случаях неизвестные ψ или ϕ много проще, чем квадратная матрица из n строк и столбцов и, следовательно, их легче найти, чем ρ . В специальном случае, $m = 1$, неизвестные ψ или ϕ являются матрицами с одним столбцом или строкой соответственно, что в точности то же самое, что и волновые функции, и значит, третий метод сводится к первому.

На практике использование третьего метода состоит обычно в работе с ψ , являющейся функцией некоторых переменных и матрицей по остальным. Предположим, что наши динамические переменные можно разделить на два независимых коммутирующих набора: скажем, набор p_1q_1 и набор p_2q_2 — такие, что состояния, по которым следует провести усреднение, одинаковы по отношению к переменным p_1q_1 , но различаются по отношению к переменным p_2q_2 . Тогда следует рассматривать ψ как волновую функцию в переменных p_1q_1 , т. е. функцию вида $(q'_1 |)$ и матрицу по переменным p_2q_2 . Это означает, что значение волновой функции $(q'_1 |)$ в любой точке q'_1 ее области определения есть не число, а функция некоммутирующих переменных p_2q_2 , которая может быть представлена в виде матрицы $(q'_2 | (q'_1 |) | q''_2)$. Функция плотности, задаваемая этой функцией ψ , имеет (в случае дискретной переменной q'_2) вид

$$\begin{aligned} (q'_1 q'_2 | \rho | q''_1 q''_2) &= \sum_{q'_2} (q'_2 | (q'_1 |) | q''_2) (q''_2 | (| q'_1) | q''_2) = \\ &= (q'_2 | (q'_1 |) (| q'_1) | q''_2). \end{aligned}$$

Вероятность того, что q_1 принимает значение q'_1 , равна

$$\sum_{q'_2} (q'_1 q'_2 | \rho | q'_1 q'_2) = \sum_{q'_2} (q'_2 | (q'_1 |) (| q'_1) | q'_2),$$

что есть просто сумма диагональных элементов матрицы, представляющей

$$(q'_1 |) (| q'_1).$$

Рассмотрим в качестве примера задачу о возбужденном атоме водорода, находящемся под воздействием некоторого возмущения, когда ориентация водородного атома в пространстве нас не интересует. В качестве переменных p_1q_1 надо тогда взять радиус r и сопряженный ему импульс p_2 , а в качестве переменных p_2q_2 — компоненты момента импульса. Наша ψ будет волновой функцией, зависящей от r , значения которой $(r' |)$ для любого r' будут функцией момента. Если дано, что изначально все ориентации равно-

вероятны, то мы знаем, что $(r' |)$ для любого r' изначально является функцией, зависящей только от величины момента k . Эта функция определяется оставшимися начальными условиями, а значения $(r' |)$ в последующие моменты времени будут задаваться уравнением (4). На этом пути можно избежать диссимметрии пространственного квантования, которой требовал бы метод волновых функций.

§ 3. Вычисления в первом порядке

Общее волновое уравнение, описывающее движение электрона в электромагнитном поле, имеет вид

$$\left\{ \frac{W}{c} + \frac{e}{c} A_0 + \rho_1 \left(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \rho_3 mc \right\} \psi = 0. \quad (6)$$

В нашей задаче поле состоит из двух падающих пучков излучения. Если выбирать потенциалы так, чтобы скалярный потенциал A_0 обратился в нуль, то получим

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_r e^{i\nu_r [t - (l_r, \mathbf{x}) / c]} + \bar{\mathbf{a}}_r e^{-i\nu_r [t - (l_r, \mathbf{x}) / c]} + \mathbf{a}_s e^{i\nu_s [t - (l_s, \mathbf{x}) / c]} + \bar{\mathbf{a}}_s e^{-i\nu_s [t - (l_s, \mathbf{x}) / c]}, \quad (7)$$

где ν_r и ν_s — умноженные на 2π частоты двух пучков, l_r и l_s — единичные векторы в направлении их распространения, а \mathbf{a}_r и \mathbf{a}_s — комплексные векторы в направлении их электрической поляризации, характеризующие их амплитуды.

Будем решать уравнение (6) методом теории возмущений, взяв в качестве энергии возмущения все члены, содержащие поле. Таким образом, запишем (6) как

$$\{W/c + \rho_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}) + \rho_3 mc\} \psi = V\psi, \quad (8)$$

где V — деленная на c возмущающая энергия, равная

$$V = -e/c \cdot \rho_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}).$$

Если V мало, то решение (8) можно получить в виде

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \dots,$$

где ψ_0 — решение в отсутствие поля, т. е.

$$\{W/c + \rho_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}) + \rho_3 mc\} \psi_0 = 0, \quad (9)$$

а поправка n -го порядка ψ_n выражается через $(n+1)$ -ю формулой

$$\{W/c + \rho_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}) + \rho_3 mc\} \psi_n = V\psi_{n-1}. \quad (10)$$

Согласно четырем членам в (7), величина V будет состоять из суммы четырех членов типа

$$-e/c \cdot \rho_1(\sigma, \mathbf{a}) e^{i\nu [t - (\mathbf{l}, \mathbf{x})/c]}. \quad (11)$$

Четыре члена получаются, если положить \mathbf{a} , ν и \mathbf{l} равными \mathbf{a}_r , ν_r и \mathbf{l}_r ; $\bar{\mathbf{a}}_r$, $-\nu_r$ и \mathbf{l}_r ; \mathbf{a}_s , ν_s и \mathbf{l}_s ; $\bar{\mathbf{a}}_s$, $-\nu_s$ и \mathbf{l}_s соответственно.

Мы не интересуемся конкретными направлениями спина электрона, поэтому воспользуемся третьим из описанных в предыдущем разделе методов, выбирая в качестве $\rho_1 q_1$ переменные, описывающие положение и импульс электрона, а в качестве переменных $\rho_2 q_2$ — все ρ и σ . Наша удовлетворяющая (6) ψ будет теперь функцией x_1, x_2, x_3 и t , значением которой в любой точке x_1, x_2, x_3, t будет не число, а некоторая функция переменных ρ и σ , которую можно представить матрицей с четырьмя строками и столбцами. Любую такую ψ можно выразить как билинейную функцию от ρ и σ , коэффициенты которой являются функциями x_1, x_2, x_3, t .

Выберем ψ_0 , чтобы она представляла электрон (или, вернее, распределение электронов) в покое и с положительной кинетической энергией mc^2 . Таким образом, ψ_0 имеет вид

$$\psi_0 = u_0 e^{-i\nu_0 t}, \quad (12)$$

где

$$\nu_0 = mc^2/\hbar,$$

а u_0 — функция ρ и σ , не зависящая от x_1, x_2, x_3 и t . Подставляя (12) в (9), получим

$$(1 + \rho_2) u_0 = 0. \quad (13)$$

Мы хотим, чтобы ψ_0 представляла распределение электронов, не имеющее выделенного направления спина, а это значит, что она не должна зависеть от σ . Поэтому u_0 может быть функцией только от ρ . Возможное u_0 , удовлетворяющее (13), — это

$$u_0 = 1 - \rho_3.$$

Другие решения не приводят ни к чему более общему при образовании произведения $\psi_0 \phi_0$. Поэтому выберем наше ψ_0 в виде

$$\psi_0 = (1 - \rho_3) e^{-i\nu_0 t},$$

представляя электронное распределение, плотность которого равна диагональной сумме выражения

$$\psi_0 \phi_0 = (1 - \rho_3)^2 = 2(1 - \rho_3)$$

и равна 8.

Используя это выражение для ψ_0 и выписывая для V только его типичный член (11), мы получим из (10) следующее уравнение для поправки первого порядка ψ_1 :

$$\left\{ \frac{W}{c} + \rho_1(\sigma, \mathbf{p}) + \rho_3 mc \right\} \psi_1 = -\frac{e}{c} \rho_1(\sigma, \mathbf{a}) (1 - \rho_3) e^{i(v-v_0)t - iv(l, \mathbf{x})/c}$$

Его решение есть, очевидно,

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\frac{e}{c} \frac{1}{W/c + \rho_1(\sigma, \mathbf{p}) + \rho_3 mc} \times \\ &\quad \times \rho_1(\sigma, \mathbf{a}) (1 - \rho_3) e^{i(v-v_0)t - iv(l, \mathbf{x})/c} = \\ &= -\frac{e}{h} \frac{1}{v_0 - v - \rho_1 v(\sigma, \mathbf{l}) + \rho_3 v_0} \rho_1(\sigma, \mathbf{a}) (1 - \rho_3) e^{i(v-v_0)t - iv(l, \mathbf{x})/c}, \end{aligned}$$

ибо операторы W и \mathbf{p} эквивалентны числовым множителям $h(v_0 - v)$ и $-hvl/c$. Мы можем избавиться от ρ и σ в знаменателе, умножая его на $[v_0 - v + \rho_1 v(\sigma, \mathbf{l}) - \rho_3 v_0]$ и вводя такой же множитель в числитель, что дает

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\frac{e}{h} \frac{1}{(v_0 - v)^2 - v^2 - v_0^2} [v_0 - v + \rho_1 v(\sigma, \mathbf{l}) - \rho_3 v_0] \times \\ &\quad \times \rho_1(\sigma, \mathbf{a}) (1 - \rho_3) e^{i(v-v_0)t - iv(l, \mathbf{x})/c} \end{aligned}$$

Члены в квадратных скобках, содержащие v_0 , сократятся, так как коэффициент при них $1 - \rho_3$, будучи умноженным на $\rho_1(1 - \rho_3)$, обратится в нуль. Таким образом, выражение для ψ_1 сводится к

$$\psi_1 = -\frac{e}{2hv_0} [1 - \rho_1(\sigma, \mathbf{l})] \rho_1(\sigma, \mathbf{a}) (1 - \rho_3) e^{i(v-v_0)t - iv(l, \mathbf{x})/c} \quad (14)$$

Вся поправка ψ_1 будет состоять из суммы четырех членов данного вида, отвечающих четырем членам в V .

§ 4. Вычисления во втором порядке

Обусловленная полем поправка первого порядка к ψ состоит из членов, периодически изменяющихся во времени, которые не отвечают наличию каких бы то ни было процессов перехода. Поэтому мы должны перейти к поправке второго порядка ψ_2 . Она будет состоять из шестнадцати членов, возникающих из шестнадцати членов, имеющих в $V\psi_1$, ибо как V , так и ψ_1 содержат по четыре члена. Типичный член в $V\psi_1$, полученный умножением члена (11) в V с a' , v' и l' , подставленными вместо a , v и l , на член

общего вида (14) в ψ_1 , есть

$$\frac{e^2}{2\hbar\nu_0c} (\sigma, \mathbf{a}') [1 - \rho_1(\sigma, \mathbf{l})] \times \\ \times (\sigma, \mathbf{a}) (1 - \rho_3) e^{i(\nu + \nu' - \nu_0)t - i(\nu\mathbf{l} + \nu'\mathbf{l}') \cdot \mathbf{x}/c}. \quad (15)$$

Это выражение можно записать как

$$ue^{-i[W't - (\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x})]/\hbar}, \quad (16)$$

где

$$W' = \hbar(\nu_0 - \nu - \nu'), \quad \mathbf{p}' = -\hbar(\nu\mathbf{l} + \nu'\mathbf{l}')/c, \quad (17)$$

а коэффициент u зависит только от ρ и σ . Этот член в $V\psi_1$ приведет к возникновению некоторого члена в поправке ψ_2 , который удовлетворяет уравнению

$$[W'/c + \rho_1(\sigma, \mathbf{p}) + \rho_3 mc] \psi_2 = ue^{-i[W't - (\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x})]/\hbar}. \quad (18)$$

Можно решить это уравнение тем же приемом, что и выше, и получить

$$\psi_2 = \frac{1}{W'/c + \rho_1(\sigma, \mathbf{p}') + \rho_3 mc} ue^{-i[W't - (\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x})]/\hbar} = \\ = \frac{1}{W'^2/c^2 - \mathbf{p}'^2 - m^2c^2} \left[\frac{W'}{c} - \rho_1(\sigma, \mathbf{p}') - \rho_3 mc \right] ue^{-i[W't - (\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x})]/\hbar}. \quad (19)$$

Таким образом, типичный член в (19) также будет периодичен по времени. Исключение, однако, возникнет в случае, когда

$$W'^2/c^2 - \mathbf{p}'^2 - m^2c^2 = 0. \quad (20)$$

Тогда описанный метод решения терпит неудачу, и более внимательное исследование показывает, что ψ_2 линейно возрастает во времени. Физически это будет означать непрерывное появление электронов с энергией W' и импульсом \mathbf{p}' и, следовательно, свидетельствовать о наличии процессов перехода, завершающихся этими значениями энергии и импульса электронов.

Конечные значения энергии и импульса задаются равенствами (17), в которых ν и ν' могут равняться любым двум из четырех величин $\nu_r, \nu_s, -\nu_r, -\nu_s$. Эти равенства выражают законы сохранения энергии и импульса в процессе с участием двух фотонов, которые либо испускаются, либо поглощаются, судя по тому, положительны ν и ν' или отрицательны. В нашей задаче падающие пучки выбраны такими, что равенство (20) может выполняться, только если ν и ν' равны ν_r и ν_s , что соответствует

испусканию фотонов r и s . Таким образом, получаем

$$W' = h(v_0 - v_r - v_s), \quad \mathbf{p}' = -h(v_r \mathbf{l}_r - v_s \mathbf{l}_s)/c, \quad (21)$$

а условие на падающие пучки, получающееся подстановкой этих W' и \mathbf{p}' в (19), есть

$$(v_0 - v_r - v_s)^2 - (v_r \mathbf{l}_r + v_s \mathbf{l}_s)^2 - v_0^2 = 0,$$

или

$$v_0(v_r + v_s) = v_r v_s [1 - (\mathbf{l}_r, \mathbf{l}_s)],$$

или же

$$\frac{1}{v_r} + \frac{1}{v_s} = \frac{1}{v_0} [1 - (\mathbf{l}_r, \mathbf{l}_s)]. \quad (22)$$

Легко видеть, что энергия W должна быть отрицательной.

Таким образом, нам следует рассматривать только те два члена в $V\psi_1$, которые получаются из типичного члена (15), если положить в нем $\mathbf{v} = v_r$, $\mathbf{v}' = v_s$ и $\mathbf{v} = v_s$, $\mathbf{v}' = v_r$ соответственно. Остальные четырнадцать членов не внесут вклада в переходы. Оба указанных члена имеют вид (16) и, будучи объединенными, дают для полного коэффициента u

$$u = \frac{e^2}{2\hbar v_0 c} \{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}_s) [1 - \rho_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{l}_r)] (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}_r) + (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}_r) \times \\ \times [1 - \rho_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{l}_s)] (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}_s)\} (1 - \rho_3) = \frac{e^2 \kappa_r \kappa_s}{2\hbar v_0 c} \{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}_s) \times \\ \times [1 - \rho_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{l}_r)] (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}_r) + (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}_r) [1 - \rho_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{l}_s)] (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}_s)\} (1 - \rho_3),$$

где $\mathbf{a}_r = \kappa_r \mathbf{m}_r$ и $\mathbf{a}_s = \kappa_s \mathbf{m}_s$, а \mathbf{m}_r и \mathbf{m}_s — единичные векторы, направленные вдоль векторов электрического поля двух пучков. Если обозначить $\mathbf{l}_r \times \mathbf{m}_r = \mathbf{n}_r$ и $\mathbf{l}_s \times \mathbf{m}_s = \mathbf{n}_s$, так что \mathbf{l}_r , \mathbf{m}_r , \mathbf{n}_r и \mathbf{l}_s , \mathbf{m}_s , \mathbf{n}_s составят две тройки единичных взаимно перпендикулярных векторов, то наше выражение для u сведется к¹⁾

$$u = \frac{e^2 \kappa_r \kappa_s}{2\hbar v_0 c} \{2(\mathbf{m}_r, \mathbf{m}_s) - \rho_1 [i(\mathbf{m}_s, \mathbf{n}_r) - (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}_s \times \mathbf{n}_r) + \\ + i(\mathbf{m}_r, \mathbf{n}_s) - (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}_r \times \mathbf{n}_s)]\} (1 - \rho_3).$$

Для краткости его можно переписать в виде

$$u = \frac{e^2 \kappa_r \kappa_s}{2\hbar v_0 c} \{\gamma_1 - i\rho_1 \gamma_2 + \rho_1(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma})\} (1 - \rho_3), \quad (23)$$

¹⁾ Эту редукцию удобно проводить при помощи формулы (16) из Proc. Roy. Soc. A. — 1928. — V. 117. — P. 618. (См. статью 5 этого сборника. — Примеч. ред.)

где

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 2(\mathbf{m}_r, \mathbf{m}_s), \quad \gamma_2 = (\mathbf{m}_r, \mathbf{n}_s) + (\mathbf{m}_s, \mathbf{n}_r), \\ \gamma &= \mathbf{m}_r \times \mathbf{n}_s + \mathbf{m}_s \times \mathbf{n}_r. \end{aligned} \quad (24)$$

Чтобы вычислить вероятности переходов, обладающие физическим смыслом, необходимо предположить, что падающие пучки таковы, что уравнения (20) или (22) выполняются лишь приближенно. Пусть $\delta W'$ — небольшая поправка, при добавлении которой к W' уравнение (20) будет выполняться точно, т. е.

$$(W' + \delta W')^2 \frac{1}{c^2} - \mathbf{p}'^2 - m^2 c^2 = 0$$

или

$$\delta W' = - \left[\frac{W'^2}{c^2} - \mathbf{p}'^2 - m^2 c^2 \right] \frac{c^2}{2W'}. \quad (25)$$

Найдем теперь решение (18), которое остается конечным при $\delta W' \rightarrow 0$. Мы получим его, добавляя к решению (19) определенную величину, а именно

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{W'^2/c^2 - \mathbf{p}'^2 - m^2 c^2} \times \\ & \times [(W' + \delta W')/c - \rho_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}') - \rho_3 mc] u e^{-i[(W' + \delta W')t - (\mathbf{p}', \mathbf{x})]/\hbar}, \end{aligned}$$

которая, как легко убедиться, является решением (9) и поэтому не вносит никакого вклада в правую часть (18). Получившаяся сумма, если пренебречь ее высокочастотной частью, которая не вносит вклада в переходы, и воспользоваться (25), имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_2 &= \frac{1}{W'^2/c^2 - \mathbf{p}'^2 - m^2 c^2} \times \\ & \times [W'/c - \rho_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}') - \rho_3 mc] u e^{-i[W't - (\mathbf{p}', \mathbf{x})]/\hbar} [1 - e^{-i\delta W' t/\hbar}] = \\ & = -c^2/2W' \cdot [W'/c - \rho_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}') - \rho_3 mc] \times \\ & \times u e^{-i[W't - (\mathbf{p}', \mathbf{x})]/\hbar} [1 - e^{-i\delta W' t/\hbar}]/\delta W'. \quad (26) \end{aligned}$$

Это выражение, где u дается формулой (22), является волновой функцией, представляющей электроны, которые осуществили процесс двойного испускания и перепрыгнули в состояния с отрицательной энергией.

§ 5. Вероятность перехода для элементарного процесса

Теперь следует определить плотность электронов, представленных волновой функцией (26). Для этого необходимо умножить полученную ψ_2 справа на эрмитово сопряженную

к ней φ_2 , что даст матрицу в переменных ρ и σ , сумму диагональных элементов которой теперь нужно вычислить. Имеем

$$\psi_2 \varphi_2 = \frac{c^4}{4W'^2} \left[\frac{W'}{c} - \rho_1(\sigma, \rho') - \rho_3 mc \right] u \times \\ \times \bar{u} \left[\frac{W'}{c} - \rho_1(\sigma, \rho') - \rho_3 mc \right] \cdot 2 \left[1 - \cos \frac{\delta W' t}{h} \right] \frac{1}{\delta W'^2},$$

где \bar{u} — эрмитово сопряженная к u . Из (23) имеем

$$\bar{u}u = e^4 |\kappa_r \kappa_s|^2 / 4h^2 v_0^2 c^2 \times \\ \times [\gamma_1 - i\rho_1 \gamma_2 + \rho_1(\sigma, \gamma)] 2(1 - \rho_3) [\gamma_1 + i\rho_1 \gamma_2 + \rho_1(\sigma, \gamma)] = \\ = e^4 |\kappa_r \kappa_s|^2 / 2h v_0^2 c^2 \times \\ \times [\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma^2 + 2\gamma_1 \rho_1(\sigma, \gamma) + (\gamma_2^2 + \gamma^2 - \gamma_1^2) \rho_3 + 2\gamma_1 \gamma_2 \rho_2].$$

Теперь, при помощи (20) и (21), находим для диагональной суммы матрицы $\psi_2 \varphi_2$:

$$\frac{c^2 e^4 |\kappa_r \kappa_s|^2}{W'^2 h^2 v_0^2} \left[(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma^2) \left(\frac{W'^2}{c^2} + \rho'^2 + m^2 c^2 \right) - \right. \\ \left. - \frac{4\gamma_1 W'}{c} (\gamma, \rho') - 2(\gamma_2^2 + \gamma^2 - \gamma_1^2) W' m \right] \left[1 - \cos \delta \frac{W' t}{h} \right] \frac{1}{\delta W'^2} = \\ = \frac{2e^4 |\kappa_r \kappa_s|^2}{|W' | h v_0^2} [(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma^2) (v_r + v_s - v_0) - \\ - 2\gamma_1 (\gamma, v_r \mathbf{1}_r + v_s \mathbf{1}_s) + (\gamma_2^2 + \gamma^2 - \gamma_1^2) v_0] \left[1 - \cos \delta \frac{W' t}{h} \right] \frac{1}{\delta W'^2}.$$

Воспользовавшись (24), легко проверить, что

$$\gamma, \mathbf{1}_s = (\mathbf{m}_r \times \mathbf{n}_s, \mathbf{1}_s) + (\mathbf{m}_s \times \mathbf{n}_r, \mathbf{1}_s) = \\ = (\mathbf{m}_r, \mathbf{m}_s) + (\mathbf{n}_r, \mathbf{n}_s) = (\gamma, \mathbf{1}_r),$$

а также что

$$\gamma^2 + \gamma_s^2 = 2 + 2(\mathbf{m}_r, \mathbf{m}_s)(\mathbf{n}_r, \mathbf{n}_s) + 2(\mathbf{m}_r, \mathbf{n}_s)(\mathbf{m}_s, \mathbf{n}_r).$$

Наше выражение для плотности сводится теперь к

$$\frac{16e^4 |\kappa_r \kappa_s|^2}{|W' | h v_0} B \frac{1 - \cos \delta W' t / h}{\delta W'^2},$$

где

$$B = -(\mathbf{m}_r, \mathbf{m}_s)^2 + \\ + \frac{1}{4} \{ 1 - (\mathbf{m}_r, \mathbf{m}_s)(\mathbf{n}_r, \mathbf{n}_s) + (\mathbf{m}_r, \mathbf{n}_s)(\mathbf{m}_s, \mathbf{n}_r) \} (v_r + v_s) / v_0. \quad (27)$$

Полученная плотность, деленная на начальную, которая, как мы выяснили в § 3, равна 8, дает вероятность

того, что электрон совершил переход за время t . Полагая

$$I_r = \frac{v_r^2}{2\pi c} |\kappa_r|^2, \quad I_s = \frac{v_s^2}{2\pi c} |\kappa_s|^2,$$

где I_r и I_s — интенсивности (т. е. количества энергии, протекающей через единицу площади в единицу времени) двух падающих пучков, получим для вероятности перехода

$$I_r I_s \frac{8\pi^2 c^2 e^4}{|W'| h v_0 v_r^2 v_s^2} B \frac{1 - \cos \delta W' t / h}{\delta W'^2}.$$

Чтобы получить вероятность перехода, имеющую физический смысл, необходимо предположить, что один из падающих пучков, скажем пучок s , не строго монохроматичен, но состоит из интенсивности I_{sv} на единичный интервал частот вблизи частоты, нужной, чтобы процесс перехода мог бы произойти. Полная вероятность перехода за время t будет задаваться теперь выражением

$$I_r I_{sv} \frac{8\pi^2 c^2 e^4}{|W'| h v_0 v_r^2 v_s^2} B \int \frac{1 - \cos \delta W' t / h}{\delta W'^2} \frac{dv_s}{2\pi}. \quad (28)$$

Изменения v_s связаны с изменениями $\delta W'$ равенствами (21) и (25). Если пренебречь членами порядка $\delta W'$, то эти равенства с помощью (22) дают

$$\begin{aligned} \frac{d\delta W'}{dv_s} &= -\frac{c^2}{2W'} \frac{d}{dv_s} \left[\frac{W'^2}{c^2} - \mathbf{p}'^2 - m^2 c^2 \right] = \\ &= -\frac{c^2}{2W'} \frac{h^2}{c^2} [2(v_r + v_s - v_0) - 2(I_s v_r I_r + v_s I_s)] = \\ &= h^2 v_0 v_r / |W'| v_s. \end{aligned}$$

Таким образом, подынтегральное выражение в (28) равно

$$\frac{|W'| v_s}{2\pi h^2 v_0 v_r} \int \frac{1 - \cos \delta W' t / h}{\delta W'^2} d\delta W' = \frac{|W'| v_s}{2h^2 v_0 v_r} t,$$

а сама вероятность перехода (28) составляет

$$I_r I_{sv} \frac{4\pi^2 c^2 e^4}{h^4 v_0^2 v_r^3 v_s} B t = I_r I_{sv} \frac{4\pi^2 e^4}{m^2 c^2 h^2 v_r^3 v_s} B t.$$

Теперь у нас есть вероятность перехода, линейно растущая со временем, и, устраняя множитель t , мы получаем вероятность перехода в единицу времени.

Если подставить вместо I_{sv} коэффициент вынужденного излучения $(2\pi h/c^2) \cdot (v_s/2\pi)^3$, то получится вероятность процесса, в котором s -фотон испускается спонтанно, а G -фотон — вынужденно, причем эта вероятность будет отнесена

к единичному телесному углу в направлении l_s испускания s -фотона. Таким образом, эта вероятность в единицу времени равна

$$I_r \frac{e^4}{m^2 c^4 h} \frac{v_s^2}{v_r^3} B. \quad (29)$$

Далее, если подставить вместо I_r коэффициент вынужденного излучения $(2\pi h/c^2) \cdot (v_r/2\pi)^3$, то получится вероятность двойного спонтанного излучения в единицу времени. Эта вероятность, а именно

$$\frac{e^4 v_s^2}{4\pi^2 m^2 c^6} B, \quad (30)$$

отнесена к единичным телесным углам в направлении l_s испускания s -фотона и направления l_r испускания r -фотона и к единичному частотному интервалу r -фотона, причем частота s -фотона определяется из (22).

Чтобы получить полную вероятность перехода для произвольного поляризационного состояния излученного s -фотона, надо подставить в качестве B , вместо (27), выражение, получающееся сложением (27) с тем, что получается из (27) заменой m_s на n_s и n_s на $-m_s$. Эта сумма равна

$$B = -(m_r, m_s)^2 - (n_r, n_s)^2 + \\ + \frac{1}{4} \{2 - 2(m_r, m_s)(n_r, n_s) + 2(m_r, n_s)(m_s, n_r)\} (v_r + v_s) \frac{1}{v_0} = \\ = -1 + (m_r, l_s)^2 + \frac{1}{2} \{1 - (l_r, l_s)\} (v_r + v_s) \frac{1}{v_0} = \quad (31)$$

$$= -\sin^2 \varphi + \frac{1}{2} (1 - \cos \theta) (v_r + v_s) \frac{1}{v_0}, \quad (32)$$

где θ — угол между l_r и l_s , т. е. между направлениями движения двух пучков, а φ — угол между m_r и l_s . Чтобы получить полную вероятность перехода для произвольного состояния поляризации также и r -фотона, следует сложить (31) с выражением, которое получается из (31) заменой m_r на n_r . Эта сумма равна

$$B = -(1 + \cos^2 \theta) + (1 - \cos \theta) (v_r + v_s)/v_0. \quad (33)$$

Наш расчет, так же как и формула (29), будет справедлив для процесса поглощения r -фотона и испускания s -фотона, т. е. для процесса рассеяния фотона с переходом из r -пучка в s -пучок, при условии, что мы всюду изменим знак у v_r . Таким образом, вероятность рассеяния в единицу времени на единицу телесного угла будет даваться

формулой (29) с B из (32) при условии, что вместо v_r мы напишем $-v_r$. Это находится в согласии с результатом Клейна и Нишины.

§ 6. Вероятность аннигиляции

Вероятность двойного испускания в единицу времени, отнесенная к единичным телесным углам в направлениях испускания каждого фотона и к единице частотного интервала для r -фотона, дается формулой (30) с B из (33) и равна, таким образом,

$$\frac{e^4 v_s^3}{4\pi^2 m^2 c^6} \left\{ -(1 + \cos^2 \theta) + (1 - \cos \theta) (v_r + v_s) \frac{1}{v_0} \right\},$$

где θ — угол между двумя направлениями испускания. Удобно выразить этот результат в виде вероятности, отнесенной к единичному интервалу энергии электрона в конечном состоянии, а не к единичному интервалу частот r -фотона. Если мы будем держать оба направления испускания фиксированными и будем менять v_r , вызывая, таким образом, изменение v_s в соответствии с равенством (22), то получим из (21)

$$\frac{dv_r}{v_r^3} = -\frac{dv_s}{v_s^2} = \frac{d(v_r + v_s)}{v_r^2 - v_s^2} = -\frac{dW'}{h(v_r^2 - v_s^2)}.$$

Рассматривая для определенности случай $v_r > v_s$, получим

$$\left| \frac{d(v_r/2\pi)}{dW'} \right| = \frac{1}{2\pi h} \frac{v_r^2}{v_r^2 - v_s^2},$$

так что вероятность перехода на единичный интервал изменения W' равна

$$\frac{e^4}{8\pi^2 h m^2 c^6} \frac{v_r^2 v_s^2}{v_r^2 - v_s^2} \left\{ -(1 + \cos^2 \theta) + (1 - \cos \theta) (v_r + v_s)/v_0 \right\}.$$

При помощи (22) эту вероятность можно выразить в виде

$$\frac{e^4}{8\pi^2 h^2 c^2} \frac{(1 - \cos \theta) \gamma - (1 + \cos^2 \theta)}{(1 - \cos \theta) \{ (1 - \cos \theta)^2 - 4(1 - \cos \theta)/\gamma \}^{1/2}}, \quad (34)$$

где

$$\gamma = \frac{v_r + v_s}{v_0} = \frac{|W'|}{mc^2} + 1 > 2.$$

Теперь проинтегрируем (34) по всем направлениям испускания, чтобы получить вероятность в единицу времени для процессов, по завершении которых электрон

обладает энергией, заключенной между W' и $W' + dW'$. Чтобы проинтегрировать по всем направлениям испускания s -фотона, следует умножить (34) на $2\pi \sin \theta d\theta$ и проинтегрировать по θ с пределами интегрирования $\cos \theta = -1$ и $\cos \theta = 1 - 4/\gamma$, а затем, чтобы проинтегрировать по всем направлениям испускания r -фотона, следует умножить полученное выражение на 4π . Все это, если положить $1 - \cos \theta = z$, дает

$$\begin{aligned} & \frac{e^4}{\pi \hbar^3 c^2} \int_{4/\gamma}^2 \frac{(2+\gamma)z - z^2 - 2}{z(z^2 - 4z/\gamma)^{1/2}} dz = \\ & = \frac{e^4}{\pi \hbar^3 c^2} \left[\left(2 + \gamma - \frac{2}{\gamma} \right) \ln \left\{ z - \frac{2}{\gamma} + \left(z^2 - \frac{4z}{\gamma} \right)^{1/2} \right\} - \right. \\ & \quad \left. - \left(1 + \frac{\gamma}{z} \right) \left(z^2 - \frac{4z}{\gamma} \right)^{1/2} \right]_{z=4/\gamma}^{z=2} = \\ & = \frac{e^4}{\pi \hbar^3 c^2} \left[\left(2 + \gamma - \frac{2}{\gamma} \right) \ln \{ \gamma - 1 + (\gamma^2 - 2\gamma)^{1/2} \} - \right. \\ & \quad \left. - (2 + \gamma) \left(1 - \frac{2}{\gamma} \right)^{1/2} \right] = \frac{e^4}{\pi \hbar^3 c^2} f(\alpha), \quad (35) \end{aligned}$$

где

$$\alpha = \gamma - 1 = |W'|/mc^2$$

и

$$\begin{aligned} f(\alpha) = & \{ \alpha + 3 - 2/(\alpha + 1) \} \ln \{ \alpha + (\alpha^2 - 1)^{1/2} \} - \\ & - (\alpha^2 - 1)^{1/2} (\alpha + 3)/(\alpha + 1) \end{aligned}$$

Выражение (35), умноженное на dW' , представляет собой полную вероятность того, что электрон совершил двойное испускание в единицу времени и имеет энергию, заключенную между W' и $W' + dW'$. Фазовый объем в импульсном пространстве, отвечающий данному энергетическому интервалу, равен $2\pi P' |W'| dW'/c^2$, где P' — величина импульса, соответствующего энергии W' , т. е.

$$P'^2 = W'^2/c^2 - m^2c^2 = m^2c^2(\alpha^2 - 1).$$

Таким образом, вероятность перехода на единицу фазового объема в импульсном пространстве конечного электрона равна

$$\frac{e^4}{4\pi^2 \hbar^3 P' |W'|} f(\alpha). \quad (36)$$

Если первоначально у нас есть один электрон в единице объема, то выражение (36) дает количество переходов в единицу времени на единицу объема в фазовом пространстве конечного электрона.

До настоящего момента мы предполагали, что все состояния с отрицательной энергией не заняты, так что электроны могут падать в них свободно. Теперь предположим, что они заняты все, за исключением одного, и это состояние соответствует протону, движущемуся с энергией W' . Наличие такого протона означает, что вакантный объем в фазовом пространстве распределения электронов отрицательной энергии равен $(2\pi h)^3$. Электрон положительной энергии может упасть только в эту вакантную ячейку фазового пространства. Таким образом, если есть один электрон положительной энергии в единичном объеме, то вероятностью того, что один из электронов упадет за единичное время в вакантную часть фазового пространства, будет выражение (36), умноженное на $(2\pi h)^3$. При этом рассматриваемая вакантная ячейка должна отвечать правильному направлению спина для каждого элементарного процесса перехода ¹⁾ с заданным начальным направлением спина электрона положительной энергии. Если направления спинов электрона и протона случайны, то в вероятности перехода в единицу времени появится дополнительный множитель $1/2$ и, следовательно, эта вероятность станет равной

$$\begin{aligned} \frac{\pi e^4}{R' |W'|} f(\alpha) = \\ = \frac{\pi e^4}{m^2 c^3} \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} \left[\frac{\alpha^2 + 4\alpha + 1}{(\alpha^2 - 1)^{1/2}} \ln \{ \alpha + (\alpha^2 - 1)^{1/2} \} - (\alpha + 3) \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Это выражение, деленное на скорость протона, дает эффективную площадь, в которую он должен попасть, чтобы соединиться с электроном и исчезнуть (вместе с ним, превратившись) в излучение.

Мы не можем дать нашему результату (37) точной численной интерпретации, поскольку мы не знаем, относится ли в нем m к массе электрона или протона. По-видимому, это — какого-либо рода среднее. В любом случае результат (37) неправдоподобно велик (is much too large), чтобы согласовываться с известной стабильностью электронов и протонов. Он дает эффективную площадь столкновения порядка величины классического размера электрона или

¹⁾ Элементарным процессом перехода является процесс с заданными направлениями испускания и заданными поляризационными состояниями испущенных фотонов.

протона для относительных скоростей, сравнимых со скоростью света, а при стремлении относительной скорости к нулю полученная площадь столкновения стремится к бесконечности. Таким образом, мы должны предположить, что взаимодействие между электроном и протоном, которым мы здесь пренебрегли, очень существенно уменьшает площадь столкновений, по крайней мере, для всех обычных скоростей. Возможно, что для очень больших скоростей результат (37) становится точным, если придать надлежащее значение величине m .

9. КВАНТОВАННЫЕ СИНГУЛЯРНОСТИ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ ¹⁾

Proceedings of the Royal Society
A vol. 133 (1931), pp. 60—72

QUANTISED SINGULARITIES IN THE ELECTROMAGNETIC FIELD

By P. A. M. DIRAC, F. R. S., St. John's College, Cambridge
(Received May 29, 1931)

§ 1. Введение

Неуклонный прогресс физики требует для его теоретической формулировки непрерывно совершенствующейся математики. Это вполне естественно, и этого следовало ожидать. Что, однако, не предвиделось научными работниками прошлого столетия,— это та конкретная форма, которую приняла основная линия усовершенствования математики. Именно, ожидалось, что математика становилась бы все более и более сложной, но опиралась бы на постоянную основу аксиом и определений, в то время как в действительности развитие современной физики потребовало такой математики, которая непрерывно смещает свои основы и становится более абстрактной. Неевклидова геометрия и некоммутативная алгебра, которые в свое время рассматривались как чистая игра ума и развлекательное занятие для логических мыслителей, были найдены теперь совершенно необходимыми для описания общих фактов физического мира. Кажется вероятным, что этот процесс нарастающей абстрактизации будет продолжаться и в будущем, и что прогресс в физике следует связывать, скорее, с непрерывной модификацией и обобщением лежащих в основе математики аксиом, чем с логическим развитием какой бы то ни было одной математической схемы, покоящейся на неизменной основе.

Сейчас в теоретической физике есть ждущие своего решения фундаментальные проблемы, такие как, например,

¹⁾ Перевод с английского В. П. Шелеста.

релятивистская формулировка квантовой механики и природы атомных ядер (за которыми последуют и более трудные — такие, как проблема жизни), решение которых потребует, как можно предположить, еще более решительного пересмотра наших фундаментальных концепций, чем то было до сих пор. Весьма вероятно, что эти изменения будут столь велики, что достижение необходимых новых идей прямыми попытками сформулировать опытные данные в математических терминах будет лежать за пределами силы человеческого интеллекта. Поэтому в будущем теоретическим работникам придется прибегнуть к менее прямому пути. Наиболее мощный способ продвижения, который можно предложить сейчас, состоит, пожалуй, в том, чтобы использовать все ресурсы чистой математики в попытках завершать и обобщать математический формализм, образующий соответствующую основу теоретической физики, и *после* каждого успеха в этом направлении пытаться интерпретировать новые математические явления в терминах физических реальностей (посредством процедуры типа принципа отождествления Эддингтона).

По-видимому, недавнюю статью автора¹⁾ можно рассматривать как маленький шаг в этой общей схеме развития. Математический формализм в то время включал серьезное затруднение, так как предсказывал существование отрицательных значений для кинетической энергии электронов. Было предложено преодолеть это затруднение за счет принципа исключения Паули, который не разрешает более одного электрона в любом состоянии, говоря, что в физическом мире почти все отрицательно-энергетические состояния уже заняты, так что наши обычные электроны с положительной энергией не могут упасть в них. Тогда возникает вопрос о физической интерпретации отрицательно-энергетических состояний, которые, согласно этой точке зрения, существуют реально. Следовало бы ожидать, что однородно заполненное распределение состояний отрицательной энергии совершенно ненаблюдаемо, но любое не занятое из этих состояний, будучи чем-то исключительным, должно было бы давать знать о своем присутствии как своего рода дырка. Было показано, что одна из этих дырок появилась бы для нас как частица с положительной энергией и положительным зарядом, и было предложено, что такую частицу следовало бы отождествлять

¹⁾ Proc. Roy. Soc. A.— 1930.— V. 126.— P. 360. (Статья 7 этого сборника.— *Примеч. ред.*)

с протоном. Последующие исследования показали, однако, что эта частица непременно имеет ту же самую массу, что и электрон¹⁾, и, к тому же, если она сталкивается с электроном, то у них есть шанс взаимно аннигилировать друг друга, несравненно слишком большой, чтобы согласовываться с известной стабильностью материи²⁾.

Таким образом оказывается, что мы должны обойти отождествление дырок с протонами и найти для них какую-либо иную интерпретацию. Следуя Оппенгеймеру³⁾, можно принять, что в мире, каким мы его знаем, не только почти все, а *все* отрицательно-энергетические состояния электронов заняты. Дырка, если бы нашлась хоть одна, была бы частицей нового сорта, не известной экспериментальной физике, имеющей такую же массу, что и электрон, и противоположный заряд. Можно назвать такую частицу анти-электроном. Не следует надеяться обнаружить какие-нибудь из них в природе из-за большой скорости их рекомбинации с электронами, и все же если бы они были получены экспериментально, то в высоком вакууме были бы вполне стабильными и поддающимися наблюдению. Столкновение между двумя жесткими γ -лучами (с энергией, по крайней мере, в полмиллиона вольт) могло бы привести к одновременному рождению электрона и анти-электрона, причем вероятность совершения такого процесса была бы того же порядка величины, что и вероятность столкновения двух γ -лучей в предположении, что они являются сферами такого же размера, как классический электрон. Эта вероятность, однако, пренебрежимо мала при доступных сейчас интенсивностях γ -лучей.

Протоны с такой точки зрения никак не связаны с электронами. Можно думать, что у протонов будут их собственные отрицательно-энергетические состояния, которые нормально все заняты, а незаполненное будет проявляться как антипротон. В настоящее время теория совершенно неспособна к каким-либо предположениям о причине, вызывающей различия между электронами и протонами.

¹⁾ *Weyl H. Gruppentheorie und Quantenmechanik (2-nd ed.). — 1931. — S. 234. (Русский перевод: Вейль Г. Теория групп и квантовая механика. — М.: Наука, 1986. — Примеч. ред.)*

²⁾ *Tamm I. // Zs. Phys. — 1930. — Bd. 62. — S. 545. Oppenheimer J. R. // Phys. Rev. — 1930. — V. 35. — P. 939. Dirac P. // Proc. Cambr. Philos. Soc. — 1930. — V. 26. — P. 361. (Предыдущая статья этого сборника. — Примеч. ред.)*

³⁾ *Oppenheimer J. R. // Phys. Rev. — 1930. — V. 35. — P. 562.*

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы выдвинуть новую идею, которая во многих отношениях сравнима с идеей об отрицательных энергиях. Она будет, по существу, относиться не к электронам и протонам, а к причине существования наименьшего электрического заряда. Экспериментально известно, что этот наименьший заряд существует и имеет величину e , приблизительно равную¹⁾

$$\frac{hc}{e^2} = 137. \quad (1)$$

Развитая здесь теория, несмотря на то, что она выглядит сперва, словно дает теоретическое значение для e , оказалась, при подробном исследовании, приводящей к связи между наименьшим электрическим зарядом и наименьшим магнитным полюсом. Она обнаруживает в действительности симметрию между электричеством и магнетизмом, совершенно чуждую современным взглядам. Она, однако, не навязывает полной симметрии, аналогично тому, как не навязывается симметрия между электронами и протонами, если мы принимаем интерпретацию Оппенгеймера. Помимо этой симметрии отношение в левой части (1) остается, с теоретической точки зрения, полностью неопределенным, а если подставить экспериментальное значение 137 в нашу теорию, то это введет количественные различия между электричеством и магнетизмом, настолько большие, что станет понятным, почему их качественное сходство не было обнаружено экспериментально вплоть до настоящего времени.

§ 2. Неинтегрируемые фазы волновых функций

Рассмотрим частицу, движение которой представляется волновой функцией ψ , зависящей от x , y , z и t . Для настоящей теории не важна ни точная форма волнового уравнения, ни то, является ли оно релятивистским или нет. Выразим ψ в форме

$$\psi = Ae^{i\gamma}, \quad (2)$$

где A и γ — вещественные функции x , y , z и t , обозначающие амплитуду и фазу волновой функции. Для данного состояния движения частицы ψ будет определена с точностью до произвольного постоянного числового коэффициента, который должен быть единичным по модулю, если мы налагаем условие, что ψ нормирована. Тогда не-

¹⁾ h означает деленную на 2π постоянную Планка.

определенность в ψ заключается в возможности добавления произвольной константы к фазе γ . Таким образом, значение γ в отдельной точке не имеет физического смысла, и только разность между значениями γ в двух различных точках имеет значение.

Этим немедленно подсказывается обобщение формализма. Мы можем принять, что γ не имеет определенного значения в отдельной точке, но только определенную разность значений для любых двух точек. Мы можем пойти дальше и предположить, что эта разность не определена, если две точки не соседние. Тогда для двух отдаленных точек определенная разность фаз будет существовать только по отношению к некоторой соединяющей их кривой, и разные кривые будут, в общем случае, давать различные разности фаз. Полное изменение фазы при обходе по какой-нибудь замкнутой кривой не обязано исчезать.

Исследуем условия, необходимые для того, чтобы эта неинтегрируемость фазы не приводила к неоднозначностям в приложениях теории. Если умножить ψ на комплексно сопряженную с ней ψ^* , получится функция плотности, имеющая непосредственный физический смысл. Эта плотность независима от фазы волновой функции, так что в этой связи никаких трудностей неопределенностью фазы вызвано не будет. Однако есть и другие, более общие типы приложений, и они тоже нуждаются в рассмотрении. Если взять две различные волновые функции ψ_m и ψ_n , то нам может понадобиться произведение $\psi_m \psi_n$. В самом деле, интеграл

$$\int \psi_m \psi_n dx dy dz$$

является числом, квадрат модуля которого имеет физический смысл, а именно дает вероятность согласования (agreement) двух состояний. Для того чтобы этот интеграл имел определенный модуль, подинтегральное выражение хотя и не обязано иметь определенную фазу в каждой точке, но все же должно обладать определенной разностью фаз между любыми двумя точками, как соседними, так и нет. Таким образом, изменение фазы $\psi_m \psi_n$ при обходе некоторой замкнутой кривой должно обратиться в нуль. Это требует, чтобы изменение фазы ψ_n при обходе замкнутой кривой было равно и противоположно изменению фазы ψ_m и, следовательно, совпадало с изменением фазы ψ_m . Отсюда мы получаем общий результат: *изменение фазы волновой функции при обходе любой замкнутой кривой должно быть одинаковым для всех волновых функций.*

Можно легко понять, что это условие — если обобщить его так, чтобы оно давало такую же неопределенность для фаз функций преобразования и матриц, представляющих наблюдаемые (в тех представлениях, где x , y и z диагональны), как и для волновых функций, — будет достаточным, чтобы обеспечить, что неинтегрируемость фазы не приведет ни к каким неоднозначностям во всех приложениях теории. Всякий раз, когда возникает ψ_n , которая не умножается на φ_m , то, во всяком случае, она будет умножаться на нечто подобное φ_m по своим свойствам, в результате чего неопределенность фазы уничтожится, за исключением несущественной константы. Например, если нужно преобразовать ψ_n в другое представление, в котором, скажем, диагональны наблюдаемые ξ , то ее следует умножить на функцию преобразования ($\xi | xyz t$) и проинтегрировать по x , y и z . Эта функция преобразования будет иметь такую же неопределенность фазы, как φ , так что фаза преобразованной волновой функции будет определенной, за исключением константы, не зависящей от ξ . Точно так же, если умножить ψ_n на матрицу ($x' y' z' t | \alpha | x'' y'' z'' t$), представляющую наблюдаемую α , то неопределенность в фазе, относящаяся к столбцу (задаваемому x'' , y'' , z'' , t), будет уничтожать неопределенность в ψ_n , а неопределенность, относящаяся к строке, останется и даст необходимую неопределенность в новой волновой функции $\alpha \psi_n$. Принцип суперпозиции для волновых функций будет обсуждаться немного позже, и решение этого вопроса завершит доказательство того, что все общие операции квантовой механики можно провести точно так же, как если бы неопределенности в фазе совсем не было.

Полученный выше результат, гласящий, что изменение фазы при обходе замкнутой кривой должно быть одним и тем же для всех волновых функций, означает, что это изменение фазы должно быть чем-то, определяемым самой динамической системой (и, возможно, отчасти представлением), и не должно зависеть от того, какое состояние системы рассматривается. Из того, что наша динамическая система — это всего лишь простая частица, явствует, что неинтегрируемость фазы должна быть связана с силовым полем, в котором частица движется.

Для математической трактовки вопроса выразим ψ в более общем, чем (2), виде — как произведение

$$\psi = \psi_1 e^{i\beta}, \quad (3)$$

где ψ_1 — любая обычная волновая функция (т. е. с опре-

деленной фазой в каждой точке), модуль которой всюду равен модулю ψ . Неопределенность фазы, таким образом, «задвинута» в множитель $e^{i\beta}$. Это требует, чтобы β не была функцией x, y, z, t , обладающей определенным значением в каждой точке, однако β должна иметь определенные в каждой точке производные

$$\kappa_x = \frac{\partial \beta}{\partial x}, \quad \kappa_y = \frac{\partial \beta}{\partial y}, \quad \kappa_z = \frac{\partial \beta}{\partial z}, \quad \kappa_0 = \frac{\partial \beta}{\partial t},$$

которые в общем случае не удовлетворяют условиям интегрируемости $\partial \kappa_x / \partial y = \partial \kappa_y / \partial x$ и т. д. Изменение фазы при обходе замкнутой кривой будет теперь по теореме Стокса равно

$$\int (\kappa, ds) = \int (\text{curl } \kappa, dS), \quad (4)$$

где ds (4-вектор) — элемент дуги замкнутой кривой, а dS (6-вектор) — элемент двумерной поверхности, границей которой является эта замкнутая кривая. Множитель ψ_1 вообще не входит в это изменение фазы.

Теперь становится ясным, что неинтегрируемость фазы вполне совместна с принципом суперпозиции, или, выражаясь более явно, что если взять две волновые функции ψ_m и ψ_n , имеющие одинаковое изменение фазы при обходе вдоль какой-либо замкнутой кривой, то любая их линейная комбинация $c_m \psi_m + c_n \psi_n$ тоже должна иметь такое же изменение фазы при обходе вдоль той же кривой. Это потому, что и ψ_m и ψ_n можно записать в виде (3) с одним и тем же множителем $e^{i\beta}$ (т. е. с одинаковыми κ), но различными ψ_1 , так что их линейная комбинация будет вновь выражаться в этом виде с тем же $e^{i\beta}$ и это $e^{i\beta}$ определяет изменение фазы для любой замкнутой кривой. Мы можем использовать в (3) один и тот же множитель $e^{i\beta}$, действуя со всеми волновыми функциями системы, однако не обязаны поступать так, ибо фиксирован только $\text{curl } \kappa$, и мы можем использовать κ , различающиеся на градиент скаляра для различных волновых функций.

Из (3) получаем

$$-ih \frac{\partial}{\partial x} \psi = e^{i\beta} \left(-ih \frac{\partial}{\partial x} + h\kappa_x \right) \psi_1, \quad (5)$$

а также сходные соотношения для производных по y, z и t . Отсюда следует, что если ψ удовлетворяет какому-нибудь волновому уравнению, содержащему операторы импульса и энергии p и W , то ψ_1 будет удовлетворять соответствующим

щему волновому уравнению, в котором \mathbf{p} и W заменены на $\mathbf{p} + \hbar \boldsymbol{\kappa}$ и $W - \hbar \kappa_0$ соответственно.

Предположим, что ψ удовлетворяет обычному волновому уравнению для свободной частицы в отсутствие всяких полей. Тогда ψ_1 будет удовлетворять обычному волновому уравнению для частицы с зарядом $-e$, движущейся в электромагнитном поле, потенциалы которого суть

$$A = \frac{\hbar c}{e} \boldsymbol{\kappa}, \quad A_0 = -\frac{\hbar}{e} \kappa_0. \quad (6)$$

Итак, поскольку ψ_1 — не что иное как обычная волновая функция с определенной фазой, наша теория переходит в обычную для движения электрона в электромагнитном поле. Это придает физический смысл нашей неинтегрируемости фазы. Мы видим, что волновая функция ψ должна всегда удовлетворять одному и тому же волновому уравнению независимо от того, присутствует поле или нет, а все влияние поля, когда оно есть, состоит в том, чтобы сделать фазу неинтегрируемой.

Если отвлечься от числовых коэффициентов, то компоненты 6-вектора $\text{curl } \boldsymbol{\kappa}$, фигурирующего в (4), равны компонентам электрического и магнитного полей \mathbf{E} и \mathbf{H} . Записанные в трехмерных векторных обозначениях, они суть

$$\text{curl } \boldsymbol{\kappa} = \frac{e}{\hbar c} \mathbf{H}, \quad \text{grad } \kappa_0 - \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial t} = \frac{e}{\hbar} \mathbf{E}. \quad (7)$$

Связь между неинтегрируемостью фазы и электромагнитным полем, разобранный в этом параграфе, не нова и является, по сути, в точности вейлевским принципом калибровочной инвариантности в его современной форме¹⁾. Она также содержится в работах Иваненко и Фока²⁾, которые рассмотрели более общий вид неинтегрируемости, основанной на общей теории параллельного переноса полу-векторов. Настоящее рассмотрение проведено для того, чтобы подчеркнуть, что интегрируемые фазы полностью совместимы со всеми общими принципами квантовой механики и никоим образом не ограничивают их физической интерпретации.

¹⁾ Weyl H. // Zs. Phys.— 1929.— V. 56.— P. 330.

²⁾ Iwanenko D., Fock V. // C. R. Acad. sci.— 1929.— V. 188.— P. 1470; Fock V. // Zs. Phys.— 1929.— Bd 57.— S. 261. Более общий тип неинтегрируемости, рассмотренный этими авторами, не представляется имеющим какие-либо физические приложения.

§ 3. Узловые сингулярности

В предыдущем параграфе мы видели, как неинтегрируемые производные χ фазы волновой функции получают естественную интерпретацию в терминах потенциалов электромагнитного поля, в результате чего наша теория становится математически эквивалентной обычной теории движения электрона в электромагнитном поле, не давая ничего нового. Имеется, однако, еще одно обстоятельство, которое надо теперь принять во внимание, а именно то, что фаза всегда определена лишь с точностью до произвольного целого числа, кратного 2π . Оно требует пересмотра связи между χ и потенциалами и приводит к новому физическому явлению.

Условие недвусмысленной физической интерпретации теории состояло в том, чтобы изменение фазы при обходе замкнутой кривой было одним и тем же для всех волновых функций. Это изменение было затем интерпретировано с помощью уравнений (4) и (7) как равное (отвлекаясь от числовых множителей) полному потоку сквозь замкнутую кривую \mathbf{b} -вектора \mathbf{E} , \mathbf{H} , описывающего электромагнитное поле. Очевидно, что теперь эти условия необходимо ослабить. Изменения фазы при обходе замкнутой кривой могут различаться для различных волновых функций на произвольные кратные 2π и потому недостаточно определены, чтобы быть сразу интерпретированными в терминах электромагнитного поля.

Чтобы исследовать этот вопрос, рассмотрим сначала очень малую замкнутую кривую. Волновое уравнение требует, чтобы волновая функция была непрерывной (исключая очень специальные обстоятельства, которые можно здесь проигнорировать), и, следовательно, изменение фазы при обходе малой замкнутой кривой должно быть малым. Поэтому это изменение не может отличаться на числа, кратные 2π для различных волновых функций. Оно должно иметь одно определенное значение, и поэтому его можно без произвола интерпретировать через поток \mathbf{b} -вектора \mathbf{E} , \mathbf{H} сквозь эту малую замкнутую кривую, причем поток должен также быть малым.

Однако имеется исключительный случай, встречающийся, когда волновая функция обращается в нуль, поскольку в таком случае ее фаза не имеет смысла. Так как волновая функция комплексна, ее исчезновение требует двух условий, и поэтому в общем случае точки, в которых она обращается в нуль, располагаются вдоль некоторой

линии ¹⁾. Мы назовем такую линию *узловой линией*. Если теперь взять волновую функцию, имеющую узловую линию, проходящую сквозь нашу малую замкнутую кривую, соображения непрерывности уже более не дадут нам права заключить, что изменение фазы при обходе малой замкнутой кривой должно быть малым. Все, что можно будет сказать, — это что изменение фазы будет близко к $2\pi n$, где n — некоторое целое число, положительное или отрицательное. Это целое число будет характеристикой узловой линии. Его знак будет связан с направлением обхода вокруг узловой линии, которое, в свою очередь, можно связать с направлением вдоль узловой линии.

Разность между изменением фазы при обходе малой замкнутой кривой и ближайшим числом $2\pi n$ должна теперь быть такой же, как изменение фазы волновой функции при обходе замкнутой кривой, сквозь которую не проходит узловая линия. Значит, эта разность и есть то, что надо интерпретировать в терминах потока б-вектора \mathbf{E} , \mathbf{H} сквозь замкнутую кривую. Для замкнутой кривой в трехмерном пространстве только магнитный поток войдет в игру и, следовательно, для изменения фазы при обходе малой замкнутой кривой мы получим

$$2\pi n + \frac{e}{hc} \int (\mathbf{H}, d\mathbf{S}).$$

Теперь можно рассмотреть большую замкнутую кривую, разделив ее на сетку из малых замкнутых кривых, лежащих на поверхности, границей которой является большая замкнутая кривая. Полное изменение фазы при обходе большой замкнутой кривой будет равно сумме всех изменений при обходе малых замкнутых кривых и, следовательно, будет равно

$$2\pi \sum n + \frac{e}{hc} \int (\mathbf{H}, d\mathbf{S}), \quad (8)$$

где интегрирование проводится по поверхности, а суммирование — по всем узловым линиям, проходящим через нее, и каждый член в сумме имеет соответствующий знак. Это

¹⁾ Чтобы сделать пояснения проще, мы рассматриваем здесь волновую функцию в трехмерном пространстве. Переход к четырем измерениям не вносит существенных изменений в теорию. Узловые линии становятся тогда двумерными узловыми поверхностями, которые можно окружить кривыми таким же способом, как линии в трех измерениях.

выражение состоит из двух частей: части $e/hc \cdot \int (\mathbf{H}, d\mathbf{S})$, которая должна быть одинаковой для всех волновых функций, и части $2\pi \sum n$, которая может быть различной для различных волновых функций.

Выражение (8), примененное к любой поверхности, равно изменению формы при обходе границы этой поверхности. Значит, примененное к замкнутой поверхности выражение (8) должно обратиться в нуль. Отсюда следует, что $\sum n$, вычисленная для всех узловых линий, пересекающих любую замкнутую поверхность, должна быть одинаковой для всех волновых функций и равняться полному магнитному потоку, пересекающему поверхность, умноженному на $-e/2\pi hc$.

Если $\sum n$ не обращается в нуль, то некоторые узловые линии должны иметь концевые точки, лежащие внутри замкнутой поверхности, поскольку узловая линия без такой концевой точки должна пересекать поверхность по крайней мере дважды и будет вносить в точках пересечения равные и противоположные по знаку вклады в $\sum n$. Значение $\sum n$ для замкнутой поверхности будет, таким образом, равняться сумме значений n для всех узловых линий, имеющих концевые точки внутри поверхности. Эта сумма должна быть одинаковой для всех волновых функций. Поскольку этот результат применим к любой замкнутой поверхности, отсюда вытекает, что концевые точки узловых линий должны быть одними и теми же для всех волновых функций. Значит, эти концевые точки суть точки сингулярности электромагнитного поля. Полный поток магнитного поля, пересекающий малую замкнутую поверхность, окружающую одну из этих точек, равен

$$4\pi\mu = 2\pi n hc/e,$$

где n — характеристика узловой линии, оканчивающейся там, или же сумма характеристик всех оканчивающихся там узловых линий, если их несколько. Таким образом, в концевой точке имеется магнитный полюс с силой (strength)

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{n hc}{e}.$$

Наша теория, таким образом, допускает изолированные магнитные полюса, однако сила этих полюсов должна квантоваться, причем квант μ_0 связан с зарядом электрона e соотношением

$$\frac{hc}{e\mu_0} = 2. \quad (9)$$

Это уравнение следует сравнить с (1). Теория требует также и квантования электрического заряда, так как любая заряженная частица, движущаяся в поле полюса величины μ_0 , должна иметь в качестве своего заряда некоторое целое число (положительное или отрицательное), умноженное на e , с тем, чтобы волновые функции, описывающие движение, могли существовать.

§ 4. Электрон в поле одноквантового полюса

Обсуждавшиеся в предыдущем параграфе волновые функции с узловыми линиями, оканчивающимися в магнитных полюсах, вполне приемлемы и доступны для аналитического рассмотрения методами, аналогичными обычным методам квантовой механики. Возможно, читателю поможет понять это простой пример, если обсудить его более подробно.

Рассмотрим движение электрона в магнитном поле одноквантового полюса при отсутствии электрического поля. Выберем полярные координаты r, θ, φ с началом в магнитном полюсе. Каждая волновая функция должна теперь иметь узловую линию, исходящую из начала.

Представим нашу волновую функцию ψ в форме (3), где β — некоторая неинтегрируемая фаза, имеющая производные κ , связанные с известным электромагнитным полем уравнениями (6). Не будет, однако, возможным получить κ , удовлетворяющие этим уравнениям всюду вокруг магнитного полюса. Должна существовать некоторая сингулярная линия, исходящая из полюса, на которой эти уравнения не удовлетворяются, причем ее можно выбрать произвольно. Мы могли бы выбрать ее совпадающей с узловой линией рассматриваемой волновой функции, что привело бы к непрерывности ψ . Этот выбор, однако, привел бы к различным κ для различных волновых функций (причем разность между любыми двумя κ была бы, конечно, четырехмерным градиентом скаляра всюду, кроме сингулярных линий). Это, по-видимому, было бы неудобным и в действительности не необходимо. Можно выразить все наши волновые функции в форме (3) с одним и тем же $e^{i\beta}$, и тогда тем волновым функциям, у которых узловые линии не совпадают с сингулярной линией для κ , будут отвечать ψ_1 , имеющие на этой сингулярной линии разрыв определенного рода, а именно такой, который точно сокращается с разрывом в $e^{i\beta}$, чтобы дать непрерывное произведение.

Магнитное поле \mathbf{H} направлено в радиальном направлении и имеет величину μ_0/r^2 , которая согласно (9) равна $1/2 hc/er^2$. Следовательно, согласно уравнениям (7) $\text{curl } \boldsymbol{\kappa}$ имеет радиальное направление и величину $1/2r^2$. Теперь можно легко проверить, что решение всех уравнений (7) имеет вид

$$\kappa_0 = 0, \quad \kappa_r = \kappa_\theta = 0, \quad \kappa_\varphi = \frac{1}{2r} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad (10)$$

где $\kappa_r, \kappa_\theta, \kappa_\varphi$ — компоненты $\boldsymbol{\kappa}$ в полярных координатах. Это решение справедливо во всех точках, за исключением линии $\theta = \pi$, на которой κ_φ обращается в бесконечность так, что интеграл $\int (\boldsymbol{\kappa}, d\mathbf{s})$ по малой кривой, окружающей эту линию, равен 2π . Можно отнести все наши волновые функции к этому набору $\boldsymbol{\kappa}$.

Рассмотрим стационарное состояние электрона с энергией W . В нерелятивистском виде волновое уравнение записывается как

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = W \psi.$$

Если применить правило, выраженное уравнением (5), то получится волновое уравнение для ψ_1 :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \{ \nabla^2 + i(\boldsymbol{\kappa}, \nabla) + i(\nabla, \boldsymbol{\kappa}) - \boldsymbol{\kappa}^2 \} \psi_1 = W \psi_1. \quad (11)$$

Значения (10) для $\boldsymbol{\kappa}$ дают

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\kappa}, \nabla) &= (\nabla, \boldsymbol{\kappa}) = \kappa_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{1}{4r^2} \sec^2 \frac{\theta}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \boldsymbol{\kappa}^2 &= \kappa_\varphi^2 = \frac{1}{4r^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}, \end{aligned}$$

и поэтому уравнение (11) превращается в

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \nabla^2 + \frac{i}{2r^2} \sec^2 \frac{\theta}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{4r^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right\} \psi_1 = W \psi_1.$$

Предположим теперь, что ψ_1 имеет вид функции f , зависящей только от r , умноженной на функцию S , зависящую от θ и φ , т. е.

$$\psi_1 = f(r) S(\theta, \varphi).$$

Это требует, чтобы

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\lambda}{r^2} \right\} f = -\frac{2mW}{\hbar^2} f, \quad (12)$$

$$\left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{i}{2} \sec^2 \frac{\theta}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right\} S = -\lambda S, \quad (13)$$

где λ — число.

Из уравнения (12) видно, что не может быть стабильных состояний, в которых электрон связан магнитным полюсом, так как оператор в левой стороне не содержит константы с размерностью длины. Этому результату можно было бы ожидать исходя из аналогии с классической теорией. Уравнение (13) определяет зависимость волновой функции от углов. Его можно рассматривать как обобщение обычного уравнения для сферических гармоник. Наинизшее собственное значение уравнения (13) есть $\lambda = 1/2$, и ему соответствуют две независимые волновые функции:

$$S_a = \cos \frac{\theta}{2}, \quad S_b = \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi},$$

что можно легко проверить прямой подстановкой. Узловая линия для S_a есть $\theta = \pi$, а для S_b — $\theta = 0$. Нужно заметить, что S_a непрерывна всюду, тогда как S_b разрывна для $\theta = \pi$, ее фаза изменяется на 2π при обходе по малой кривой, окружающей линию $\theta = \pi$. Это как раз то, что необходимо, чтобы S_a и S_b , умноженные на $e^{i\varphi}$, могли дать непрерывную волновую функцию ψ . Две ψ , которые получаются таким способом, равноправны, а различие в поведении S_a и S_b обусловлено нашим выбором χ с сингулярностью при $\theta = \pi$.

Общее собственное значение уравнения (13) имеет вид $\lambda = n^2 + 2n + 1/2$. Общее решение этого волнового уравнения было получено И. Таммом¹⁾.

§ 5. Заключение

Элементарная классическая теория позволяет формулировать уравнение движения для электрона в поле, созданном произвольным распределением электрических зарядов и магнитных полюсов. Если, однако, мы желаем выразить уравнения движения в гамильтоновой форме, то следует ввести электромагнитные потенциалы, а это возможно только тогда, когда нет изолированных магнитных полюсов. Квантовая механика, в своем обычном обосновании, выводится из гамильтоновой формы классической теории и, следовательно, применима только тогда, когда нет изолированных магнитных полюсов.

Цель настоящей статьи — показать, что квантовая механика в действительности не исключает существования изолированных магнитных полюсов. Напротив, существующий формализм квантовой механики, будучи развит естественным образом без наложения произвольных ограни-

¹⁾ *Tamm I. // Zs. Phys.* — 1930. — Bd 62. — S. 545.

чений, неизбежно приводит к волновым уравнениям, единственная физическая интерпретация которых—это движение электрона в поле одиночного полюса. Это новое развитие не требует *никакого изменения* в формализме, когда он выражен на языке абстрактных символов, обозначающих состояния и наблюдаемые, а является лишь обобщением возможностей представления этих абстрактных символов волновыми функциями и матрицами. При таких обстоятельствах было бы удивительно, если бы природа не использовала этой возможности.

Теория приводит к связи между квантом магнитного полюса и электронным зарядом, а именно к уравнению (9). Конечно, обсуждение только этой взаимности между электричеством и магнетизмом вместо чисто электронного квантового условия, такого как (1), несколько обманывает надежды. Однако, по-видимому, нет возможности модифицировать теорию, поскольку она не содержит произвола, и поэтому объяснение (1), скорее всего, потребует какой-то совершенно новой идеи.

Теоретическая взаимность между электричеством и магнетизмом является полной. Вместо рассмотрения движения электрона в поле неподвижного магнитного полюса, как в § 4, мы могли бы столь же успешно рассмотреть движение полюса в поле неподвижного заряда. Это потребовало бы введения электромагнитных потенциалов V , удовлетворяющих уравнениям

$$\mathbf{E} = \text{curl } \mathbf{V}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \text{grad } V_0,$$

и их следовало бы использовать вместо A в уравнениях (6). В остальном теория развивалась бы совершенно аналогично и вела бы к такому же условию (9), связывающему наименьший полюс с наименьшим зарядом.

Остается обсудить вопрос о том, почему не наблюдаются изолированные магнитные полюса. Экспериментальный результат (1) показывает, что должна быть некоторая причина для несходства между электричеством и магнетизмом (возможно, связанная с причиной несходства между электроном и протоном), в результате чего мы имеем не $\mu_0 = e$, а $\mu_0 = 137/2 \cdot e$. Это означает, что сила притяжения между двумя одноквантовыми полюсами противоположного знака в $\left(\frac{137}{2}\right)^2 = 4692\frac{1}{4}$ раз больше, чем между электроном и протоном. Этой очень большой силой, возможно, объясняется, почему полюса противоположного знака никогда еще не были разделены.

10. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА ¹⁾

Proceedings of the Royal Society
A vol. 136 (1932), pp. 453—464

RELATIVISTIC QUANTUM MECHANICS

By P.A.M. DIRAC, F.R.S., St. John's College, Cambridge

(Received March 24, 1932)

§ 1. Введение

Непрерывное развитие квантовой теории, которое имело место в течение этого столетия, стало возможным только за счет постоянной апелляции к Принципу Соответствия Бора, согласно которому классическая теория может давать важную информацию о квантовых явлениях несмотря на существенное различие в основных идеях этих двух теорий. Мастерское продвижение было сделано в 1925 г. Гейзенбергом, который показал, каким образом уравнения классической физики могут быть переиначены на чисто формальном пути и сделаны применимыми к величинам, важным для квантовой теории, поставив тем самым Принцип Соответствия на количественную основу и заложив фундамент новой квантовой механики. Выяснилось, что гейзенбергова схема удивительно хорошо припасовывается к гамильтоновой теории классической механики, и позволяет приложить к квантовой теории всю информацию, предоставляемую классической теорией, в той мере, в какой эта информация совместима с гамильтоновой формой. Таким образом оказалось возможным построить удовлетворительную квантовую механику для обращения с любой динамической системой, составленной из взаимодействующих частиц, если только взаимодействие могло быть выражено с помощью энергетического члена для добавления к функции Гамильтона.

¹⁾ Перевод с английского В. П. Павлова.

Это не исчерпывает всей области полезных применений классической теории. Классическая электродинамика в ее аккуратной (специально) релятивистской форме учит нас, что понятие энергии взаимодействия между частицами есть лишь приближение, которое следовало бы заменить тем представлением, что каждая частица испускает волны, которые разбегаются от нее с конечной скоростью и влияют на другие частицы, проходя через них. Мы должны найти путь перенесения этой новой информации в квантовую теорию и должны построить релятивистскую квантовую механику, прежде чем сможем обходиться без Принципа Соответствия.

Предварительная атака проблемы релятивистской квантовой механики была предпринята через решение задачи об одной заряженной частице, движущейся в заданном классическом поле. Для рассмотрения этой задачи важно использовать шредингерову форму квантовой механики, согласно которой движение частицы описывается волновой функцией, содержащей пространственные и временную координаты симметричным образом. Решение является удовлетворительным с точки зрения принципа соответствия, хотя и содержит трудность, обусловленную появлением для частицы возможных отрицательных значений энергии. Трудность эта не связана с неправильным использованием классической информации и не будет нас здесь занимать.

Этот метод волновой функции легко распространяется на две или более частицы, пока мы продолжаем придерживаться представления о заданном классическом поле, в котором частицы движутся. Получающаяся теория логически удовлетворительна, но, конечно, не полна, поскольку не дает взаимодействия между частицами. Значит, становится необходимым отказаться от идеи о заданном классическом поле и взять вместо него поле с динамическим смыслом, действующее в соответствии с квантовыми законами.

Попытка построения исчерпывающей теории на этих основах была сделана Гейзенбергом и Паули ¹⁾. Эти авторы рассматривают само поле как динамическую систему, поддающуюся гамильтоновой трактовке, а его взаимодействие с частицами — как поддающееся описанию энергией взаимодействия, так что можно применять обычный метод гамильтоновой квантовой механики. Возникают серьезные

¹⁾ *Heisenberg, Pauli // Zs. Phys.— 1929.— Bd 56.— S. 1; Bd 59.— S. 168.*

возражения против таких взглядов, не говоря уже о чисто математических трудностях, к которым они ведут. Если мы хотим предпринять наблюдение над системой взаимодействующих частиц, то единственным эффективным способом будет подвергнуть их действию поля электромагнитного излучения и посмотреть, как они будут реагировать. Поэтому роль поля состоит в снабжении нас средствами производства наблюдений. *Сама природа наблюдения требует взаимодействия между полем и частицами.* Мы не можем поэтому допустить, чтобы поле было бы динамической системой на равных основах с частицами и поэтому, чем-то, что можно наблюдать таким же путем, что и частицы. Поле должно было бы появиться в теории как нечто более элементарное и фундаментальное.

К тому же уравнения поля всегда линейны, т. е. имеют форму, типичную для волновых уравнений квантовой теории. Это подсказывает глубоко лежащие связи и возможности для упрощения и унификации, полностью отсутствующие в теории Гейзенберга — Паули.

В настоящей работе предлагается схема, которая, по-видимому, правильно передает взаимодействие поля и частиц, и притом удивительно простым образом. Полностью использована вся информация, которую предоставляет классическая теория. Общие идеи применимы с любого рода простыми гармоническими волнами, передающими взаимодействие между частицами и предоставляющими средство для наблюдений частиц (например, с продольными волнами типа звуковых волн), а не только для электромагнитного случая, хотя, по-видимому, только этот последний представляет интерес для атомной теории.

§ 2. Релятивистские наблюдения

Бесусловный шаг вперед в построении релятивистской теории взаимодействия двух электронов содержится в недавней работе Мёллера ¹⁾, где показано, что в вычислениях взаимного рассеяния двух сталкивающихся электронов методом борновского приближения можно описывать взаимодействие запаздывающими потенциалами и все время использовать релятивистские представления без того, чтобы столкнуться с какой-либо неопределенностью в приближении первого порядка для коэффициента рассеяния. Именно это отсутствие неопределенностей и составляет

¹⁾ Møller // Zs. Phys.— 1931.— Bd 70.— S. 786.

основу предположения о правильности результата. Если, однако, стараться применить аналогичный метод к старшим приближениям или более общим задачам, то с неопределенностями придется встретиться наверняка.

Метод, которым Мёллер получил свой результат, можно сравнить с методами Принципа Соответствия, бывшими в ходу до введения гейзенберговой матричной теории для вычисления коэффициентов Эйнштейна A и B из какого-либо сорта средних значений классических величин, относящихся к начальным и конечным состояниям. Надо было действовать в совершенно другом направлении, именно, следовать методам, введенным Гейзенбергом в 1925 г., которые уже привели к столь грандиозным успехам в нерелятивистской квантовой механике.

Гейзенберг выдвинул тот принцип, что надо сосредоточить свое внимание на наблюдаемых величинах и построить алгебраическую схему, в которой участвуют только такие наблюдаемые величины. Строго говоря, то, что образует строительные камни гейзенберговой алгебраической схемы, — это не сами наблюдаемые величины (эйнштейновы A и B), но, скорее, более элементарные величины — матричные элементы, из которых наблюдаемые величины получаются как квадраты их модулей. Вводимые на таком пути дополнительные величины — фазы — существенны.

Посмотрим, каковы соответствующие величины в релятивистской теории. Чтобы сделать релятивистское наблюдение над системой частиц, надо, как упоминалось во Введении, послать на нее определенное электромагнитное излучение и исследовать рассеянное излучение. Числовой величиной, которую мы наблюдаем, будет таким образом вероятность того, что произойдет процесс определенного радиационного перехода. Этот процесс можно характеризовать интенсивностями различных монохроматических составляющих падающего и уходящего полей излучения. (Ту, чисто математическую, трудность, что полное число этих компонент есть бесконечность высокого порядка, проигнорируем.) Фазы не должны определяться вместе с интенсивностями, так как это нарушило бы хорошо установленные квантовые принципы.

В нерелятивистской квантовой механике вероятность того, что произойдет какой-либо процесс перехода, всегда задается квадратом модуля некоторой величины типа матричного элемента или просто функции преобразования, относящихся к начальному и конечному состояниям. Представляется разумным принять, что это по-прежнему

будет иметь место и в релятивистской квантовой механике. Таким образом, релятивистские наблюдаемые величины, всегда являющиеся вероятностями переходов, будут все появляться как квадраты модулей некоторых величин. Эти последние, которые мы будем называть амплитудами вероятности, и будут тогда строительными камнями, аналогичными матричным элементам Гейзенберга. Мы должны надеяться быть в состоянии *построить алгебраическую схему, включающую лишь амплитуды вероятности, и перевести уравнения движения релятивистской классической теории прямо в точные уравнения, выражаемые исключительно в терминах этих величин.*

Таким образом, информация, которой снабжает нас классическая теория, должна быть использована, чтобы получить соотношения между амплитудами вероятности *различных* физических процессов, скорее чем позволить сосчитать какой-либо частный из них. Только в очень специальных случаях, пример которых представляет нам работа Мёллера, можно сосчитать релятивистскую амплитуду вероятности без того, чтобы одновременно не сосчитать целый ряд амплитуд, относящихся ко всем возможным путям, которыми рассматриваемые частицы могут взаимодействовать с полем излучения.

Особо важным пунктом, относящимся к строительным камням новой теории, является то, что каждый из них относится к одному полю из падающих волн и одному полю из уходящих волн, или к одному начальному полю процесса перехода и одному конечному полю. Величины, относящиеся к двум начальным полям или к двум конечным полям, не допускаются. В этом проявляется отклонение от теории Гейзенберга и Паули, согласно которой, если дана величина, относящаяся к одному начальному и одному конечному полю, то из нее можно получить величину, относящуюся к двум начальным полям или к двум конечным полям непосредственным применением квантово-механической теории преобразований. Теория Гейзенберга—Паули включает поэтому много величин, которые не связаны с результатами наблюдений и должны быть удалены из рассмотрения, если хотеть ясного понимания лежащих в основе физических соотношений.

§ 3. Уравнения движения

Рассмотрим теперь подробнее вопрос о том, как содержащаяся в классической электродинамике информация может быть перенесена в квантовую теорию. Мы сейчас

же столкнемся с той трудностью, что сама классическая теория не свободна от неоднозначностей.

Чтобы сделать обсуждение совершенно точным, допустим, что у нас есть один электрон, взаимодействующий с полем излучения, и будем считать излучение разложенным на падающие и уходящие волны. Классическая постановка задачи состоит в том, чтобы при заданном падающем излучении и подходящих начальных условиях для электрона определить движение электрона и уходящее излучение. К этой задаче относятся классические уравнения двоякого рода: (i) определяющие поле, порождаемое электроном (которое есть как раз разность между уходящим и падающим полями), через описывающие движение электрона переменные, и (ii) определяющие движение электрона. Уравнения (i) совершенно определены и недвусмысленны, чего нельзя сказать об уравнениях (ii). Эти последние выражают ускорение электрона через полевые величины в той точке, где расположен электрон, и именно эти полевые величины в полной классической картине бесконечны и не определены.

При обычном приближенном рассмотрении задачи для этих полевых величин выбирают как раз вклад падающих волн. Такое рассмотрение по необходимости приближенно, ибо оно не принимает во внимание обратное действие испускаемых электроном волн на него самого. Для точного рассмотрения следовало бы ожидать, чтобы поле, определяющее ускорение электрона, было каким-то образом связано и с падающими, и с уходящими волнами. В классике предпринимались попытки улучшить теорию, принимая для электрона определенную структуру и вычисляя действие на одну его часть поля, создаваемого остальными, но в современной физике такие методы непозволительны.

Тут нужно честно признать, что мы достигли предела классической электромагнитной теории. У нас есть совершенно определенные уравнения, позволяющие найти движение электрона через полевые величины, но в обычной классической картине мы не в состоянии правильно интерпретировать эти полевые величины, и все, что мы можем сказать о них, — это то, что они каким-то неклассическим образом связаны с двумя полями — падающих и уходящих волн. Дальше можно продвинуться, только вводя квантовые идеи.

Сделаем то допущение, что *переход от поля падающих волн к полю уходящих волн — это квантовый скачок,*

совершаемый одним полем. Такое допущение позволительно в силу того обсуждавшегося в предыдущем разделе обстоятельства, что все величины в релятивистской квантовой механике по своей природе суть амплитуды вероятности, относящиеся к одному падающему и одному уходящему полю, так что мы можем связать, скажем, правую сторону амплитуд вероятности с падающими полями, а левую сторону — с уходящими полями. На таком пути мы автоматически исключаем величины, относящиеся к двум падающим полям или к двум уходящим полям, и совершаем большое упрощение оснований теории.

Значение этого нового предположения состоит в том, что *классическая картина, из которой мы выводим наши уравнения движения, не должна содержать ссылок на квантовые скачки.* Поэтому эта классическая картина должна содержать только одно поле — поле, составленное из волн, без помех проходящих через электрон и удовлетворяющих всюду уравнениям Максвелла для пустого пространства. В такой картине уравнения движения для электрона совершенно определены и недвусмысленны. Нет никаких уравнений движения для поля, ибо поле во всем пространстве-времени представляется заданным. Поэтому взаимодействие между электроном и полем введено в уравнения только в одном месте.

Квантование выведенных из такого представления уравнений движения удобно выполнить в две стадии. Будем сперва квантовать только переменные, описывающие электрон. Тогда мы получим в точности квантовую теорию движения электрона в заданном классическом поле, с тем отличием, что в нашем случае поле обязательно должно быть разложимо на плоские волны и потому не содержит ничего типа кулоновых сил. У нас будет уравнение Шредингера вида

$$F\psi = 0,$$

где оператор F , в пренебрежении спином, есть

$$F = \left(ih \frac{\partial}{\partial t} + eA_0 \right)^2 - \left(ihc \frac{\partial}{\partial x} - eA_x \right)^2 - \dots - m^2 c^4. \quad (1)$$

Не надо упускать из виду, что волновая функция ψ зависит не только от описывающих электрон переменных x , y , z и t , но и от громадного числа параметров, описывающих поле, в качестве которых удобно выбрать интенсивности J и фазы ω различных фурье-составляющих поля. Сходным образом и фигурирующие в (1) потенциалы A

суть функции не только описывающих мгновенное положение электрона переменных x , y , z и t , но и параметров J и ω .

На второй стадии квантования мы примем, что появляющиеся в ψ и A J и ω не числа, но операторы, удовлетворяющие обычным квантовым условиям, управляющим интенсивностями и фазами фурье-составляющих электромагнитного поля в пустом пространстве. С получаемыми таким образом новыми квантовыми уравнениями следует обращаться на тех же основах, что и со старыми. В частности, их можно использовать для нахождения матричных элементов, связанных с электронными скачками. Каждый матричный элемент будет теперь функцией некоммутирующих J и ω , так что, когда мы выберем представление для J и ω , возникнет набор величин, где каждая относится к двум состояниям поля в той же мере, как к двум электронным состояниям, т. е. величин, имеющих природу амплитуд вероятности из § 2.

Для рассмотрения задачи о взаимодействии двух электронов нам потребуется волновая функция ψ , которая есть функция от переменных x_1, y_1, z_1, t_1 и x_2, y_2, z_2, t_2 , описывающих два электрона, и одного набора переменных J и ω , описывающих поле. Функция ψ должна удовлетворять двум волновым уравнениям:

$$F_1\psi = 0, \quad F_2\psi = 0, \quad (2)$$

где F_1 — оператор, получающийся из F подстановкой $\partial/\partial t_1$ и т. д. вместо $\partial/\partial t$ и т. д. и взятием для A их значений в точке x_1, y_1, z_1, t_1 и аналогично для F_2 . Эти два волновых уравнения полностью описывают отношения между электронами и полем. Не требуется никаких членов типа кулоновой энергии взаимодействия в операторах, входящих в волновые уравнения. Взаимодействие двух электронов обусловлено тем, что оба движутся, будучи связанными с одним и тем же полем. Математически взаимодействие проявляет себя через то обстоятельство, что если мы возьмем одну волновую функцию ψ_1 , зависящую только от x_1, y_1, z_1, t_1 и J, ω , удовлетворяющую

$$F_1\psi_1 = 0, \quad (3A)$$

и другую волновую функцию ψ_2 , зависящую от x_2, y_2, z_2, t_2 и J, ω , удовлетворяющую

$$F_2\psi_2 = 0, \quad (3B)$$

то ни одно из произведений $\psi_1\psi_2$ или $\psi_2\psi_1$ не будет удовлетворять обоим уравнениям (2). Решение уравнений (2)—это существенно другая и более сложная задача, нежели решение (3А) и (3В).

§ 4. Взаимодействие между двумя частицами в одном измерении

Может показаться весьма неожиданным, что теория, в которой все поля разложимы в плоские волны, может что-либо сказать о природе обычных электростатических сил между электронами. Поэтому мы проиллюстрируем тот факт, что эти силы действительно содержатся в наших волновых уравнениях, на простом примере. Возьмем случай двух частиц, движущихся в поле в одномерном пространстве, и приступим к решению уравнения (2), делая различные приближения, допустимые, если мы не интересуемся релятивистскими эффектами.

Допустим, что поле описывается потенциальной функцией V , удовлетворяющей волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0,$$

и что классическое выражение для энергии—это

$$H = \frac{1}{8\pi} \int \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 \right\} dx.$$

Если мы разложим V на его фурье-компоненты, т. е. напомним

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} \{ a_\nu e^{i\nu(t+x/c)} + b_\nu e^{i\nu(t-x/c)} \}, \quad (4)$$

то выражение для энергии перейдет в

$$H = \frac{1}{c} \int_0^{\infty} \nu^2 \{ a_\nu a_{-\nu} + b_\nu b_{-\nu} \} d\nu. \quad (5)$$

Посмотрим теперь, как выглядят соотношения в скобках Пуассона между фурье-коэффициентами a и b . Эти соотношения должны быть выбраны так, чтобы величины $a_\nu e^{i\nu t}$, $b_\nu e^{i\nu t}$, рассматриваемые как динамические переменные, удовлетворяли бы уравнениям движения в гамильтоновой форме с гамильтоновой функцией (5), т. е.

$$\frac{d}{dt} (a_\nu e^{i\nu t}) = [a_\nu e^{i\nu t}, H]$$

или

$$i\mathbf{v}a_{\mathbf{v}} = [a_{\mathbf{v}}, H],$$

и аналогично для $b_{\mathbf{v}}$. Легко сосчитать, что должно быть

$$\begin{aligned} [a_{\mathbf{v}}, a_{\mathbf{v}'}] &= [b_{\mathbf{v}}, b_{\mathbf{v}'}] = ie/v \cdot \delta(\mathbf{v} + \mathbf{v}'), \\ [a_{\mathbf{v}}, b_{\mathbf{v}'}] &= 0. \end{aligned}$$

В квантовой теории эти соотношения превращаются в

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{v}}a_{\mathbf{v}'} - a_{\mathbf{v}'}a_{\mathbf{v}} &= b_{\mathbf{v}}b_{\mathbf{v}'} - b_{\mathbf{v}'}b_{\mathbf{v}} = -hc/v \cdot \delta(\mathbf{v} + \mathbf{v}'), \\ a_{\mathbf{v}}b_{\mathbf{v}'} - b_{\mathbf{v}'}a_{\mathbf{v}} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь мы введем две частицы с массами m_1 и m_2 и с «зарядами» ε_1 и ε_2 и предположим, что взаимодействие каждой с полем может быть описано энергией взаимодействия, равной ее заряду, умноженному на значение V в той точке, где она расположена. Пренебрегая релятивистским изменением массы со скоростью, мы получим два волновых уравнения:

$$\begin{cases} ih \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \varepsilon_1 V(x_1, t_1) \} \psi = 0, \\ ih \frac{\partial}{\partial t_2} + \frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \varepsilon_2 V(x_2, t_2) \} \psi = 0. \end{cases}$$

Полагая $t_1 = t_2 = t$, можем свести их к одному волновому уравнению:

$$\left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \varepsilon_1 V(x_1, t) - \varepsilon_2 V(x_2, t) \right\} \psi = 0. \quad (7)$$

Перейдем к получению решения этого уравнения в форме ряда по степеням ε . Для этого положим

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \dots,$$

где

$$\left\{ ih \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right\} \psi_0 = 0, \quad (8)$$

$$\left\{ ih \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right\} \psi_1 = \{ \varepsilon_1 V(x_1 t) + \varepsilon_2 V(x_2 t) \} \psi_0, \quad (9)$$

$$\left\{ ih \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right\} \psi_2 = \{ \varepsilon_1 V(x_1 t) + \varepsilon_2 V(x_2 t) \} \psi_1. \quad (10)$$

Возьмем

$$\psi_0 = e^{ip_1 x_1 / \hbar} e^{ip_2 x_2 / \hbar} e^{-iWt / \hbar} \delta_{J_0},$$

где

$$W = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} \quad (11)$$

в качестве решения (8), представляющего состояние, в котором частицы обладают импульсами p_1 и p_2 , а все J , т. е. интенсивности фурье-компонент поля, равны нулю. Тогда оператор $\varepsilon_1 V(x_1 t) + \varepsilon_2 V(x_2 t)$, появившийся в правых частях (9) и (10), если выразить его матрицей в представлении, в котором все J диагональны, содержит бы только матричные элементы, отвечающие переходам, в которых точно одна из J меняется на один квант. Следовательно, ψ_1 должна состоять из суммы членов, каждый из которых отвечает состоянию поля с (точно) одним колебанием, возбужденным одним квантом. Аналогично ψ_2 должна состоять из суммы членов, отвечающих (каждый) либо двух-квантовому, либо нуль-квантовому состояниям поля. Последние единственно составляют предмет нашего интереса, поскольку их можно сравнить с членами, которые возникли бы от включения энергии взаимодействия между двумя частицами в оператор волнового уравнения (7).

Мы можем получить решение уравнения (9), выражая правую часть через ее фурье-компоненты с помощью (4) и деля каждую компоненту на число, которому эквивалентен оператор в левой части (9), когда он действует на эту компоненту. Это дает

$$\begin{aligned} \psi_1 = \varepsilon_1 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{a_\nu e^{i\nu(t+x_1/c)}}{W - h\nu - (p_1 + h\nu/c)^2/2m_1 - p_2^2/2m_2} + \right. \\ \left. + \frac{b_\nu e^{i\nu(t-x_1/c)}}{W - h\nu - (p_1 - h\nu/c)^2/2m_1 - p_2^2/2m_2} \right\} d\nu \cdot \psi_0 + \\ + \varepsilon_2 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{a_\nu e^{i\nu(t+x_2/c)}}{W - h\nu - p_1^2/2m_1 - (p_2 + h\nu/c)^2/2m_2} + \right. \\ \left. + \frac{b_\nu e^{i\nu(t-x_2/c)}}{W - h\nu - p_1^2/2m_1 - (p_2 - h\nu/c)^2/2m_2} \right\} d\nu \cdot \psi_0. \end{aligned}$$

Если мы используем (11) и пренебрежем по сравнению с единицей такими членами, как $p_1/m_1 c$, $h\nu/m_1 c^2$ (что позволительно, если мы не интересуемся релятивистскими эффектами), то все это сведется к

$$\begin{aligned} \psi_1 = -\frac{\varepsilon_1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \{ a_\nu e^{i\nu(t+x_1/c)} + b_\nu e^{i\nu(t-x_1/c)} \} \frac{d\nu}{\nu} \cdot \psi_0 - \\ - \frac{\varepsilon_2}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \{ a_\nu e^{i\nu(t+x_2/c)} + b_\nu e^{i\nu(t-x_2/c)} \} \frac{d\nu}{\nu} \cdot \psi_0. \quad (12) \end{aligned}$$

Подставив это значение для ψ_1 в правую часть (10) и подставив также для V его разложение (4), получим выражение, состоящее из оператора, являющегося однородной квадратичной функцией a и b , действующего на ψ_0 . Мы должны вычислить только ту часть выражения, которая отвечает невозбужденному состоянию поля. Какой-либо вклад в эту часть внесут только те члены оператора, которые содержат произведения типа $a_\nu a_{-\nu}$ или $b_\nu b_{-\nu}$. Чтобы получить вклад от члена, содержащего $a_\nu a_{-\nu}$, заметим, что для $\nu > 0$ фурье-компоненты a_ν и $a_{-\nu}$ аналогичны величинам $p + iq$ и $p - iq$, соответственно, в задаче простого гармонического осциллятора. Поэтому $a_\nu a_{-\nu}$ с $\nu > 0$ пропорционально удвоенной энергии соответствующего колебания (без нулевой энергии), так что оно не дает вклада, будучи умноженным на ψ_0 . Первое из квантовых условий (6) показывает тогда, что для того, чтобы получить вклад от члена, содержащего $a_{-\nu} a_\nu$ с $\nu > 0$, мы должны считать $a_{-\nu} a_\nu$ равным $hc/\nu \cdot \delta(\nu - \nu')$. Тем же путем находим, что надо считать $b_\nu b_{-\nu} = 0$ и $b_{-\nu} b_\nu = hc/\nu \cdot \delta(\nu - \nu')$ для $\nu > 0$.

Член, возникающий в правой части (10) из произведения $\varepsilon_2 V(x_2 t)$ с первым членом из ψ_1 в (12), можно записать как

$$\begin{aligned} & \frac{-\varepsilon_1 \varepsilon_2}{h} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu' \{ a_{-\nu'} e^{-i\nu'(t+x_2/c)} + b_{-\nu'} e^{-i\nu'(t-x_2/c)} \} \times \\ & \quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{\nu} \{ a_\nu e^{i\nu(t+x_1/c)} + b_\nu e^{i\nu(t-x_1/c)} \} \cdot \psi_0. \end{aligned}$$

Его часть, относящаяся к невозбужденному состоянию поля, это, в силу изложенных правил,

$$\begin{aligned} & \frac{-\varepsilon_1 \varepsilon_2}{h} \int_0^{\infty} d\nu' \int_0^{\infty} \frac{d\nu}{\nu} \frac{hc}{\nu} \delta(\nu - \nu') \times \\ & \quad \times \{ e^{-i\nu'(t+x_2/c)} e^{i\nu(t+x_1/c)} + e^{-i\nu'(t-x_2/c)} e^{i\nu(t-x_1/c)} \} \cdot \psi_0 = \\ & \quad = -2\varepsilon_1 \varepsilon_2 c \int_0^{\infty} \frac{d\nu}{\nu^2} \cos \nu(x_1 - x_2)/c \cdot \psi_0. \end{aligned}$$

Коэффициент при ψ_0 здесь отличается только на бесконечно большую постоянную (не зависящую от x_1 и x_2) от

$$2\varepsilon_1 \varepsilon_2 c \int_0^{\infty} \frac{d\nu}{\nu^2} \{ 1 - \cos \nu(x_1 - x_2)/c \} = \pi \varepsilon_1 \varepsilon_2 |x_1 - x_2|.$$

С остальными членами в правой части (10) можно поступить таким же образом и получить для всей относящейся к невозбужденному состоянию поля части:

$$\{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_2|x_1-x_2|+K\}\psi_0, \quad (13)$$

где K — бесконечная константа.

Но уравнение (10) с выражением (13) в его правой части — это как раз то, что мы должны были бы получить, если бы решали волновое уравнение

$$\left\{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - 2\pi\varepsilon_1\varepsilon_2|x_1-x_2| - K\right\}\psi = 0$$

методом приближения разложением по степеням $\varepsilon_1\varepsilon_2$. Итак, наше волновое уравнение (7) неявно содержит в себе взаимодействие между частицами, приближенно выражаемое энергией взаимодействия $2\pi\varepsilon_1\varepsilon_2|x_1-x_2|$. Численно эта энергия взаимодействия согласуется с тем, что следовало бы ожидать от одномерной электростатической теории. Имеется, однако, ошибка в знаке, ибо эта энергия приводит к силам притяжения между одинаковыми зарядами.

§ 5. Резюме

Предложена квантовая теория, в которой взаимодействие между частицами возникает за счет колебаний промежуточной среды, передающихся с конечной скоростью. Основные уравнения включают только величины, имеющие наблюдаемый смысл, причем особое внимание уделяется тому факту, что акт наблюдения обязательно включает взаимодействие между частицами и полем. Проведено подробное решение одномерной задачи, чтобы показать, что силы электростатической природы неявно содержатся в теории.

[Замечание, добавленное 20-го апреля.—Мне было указано профессором Гейзенбергом, что полученный в изложенных выше вычислениях знак энергии взаимодействия на самом деле совершенно правилен, ибо с одномерными продольными волнами, которые были использованы, классическая теория также требует сил притяжения между одинаковыми зарядами.]¹⁾

¹⁾ Как мы знаем теперь, отталкивание одноименных зарядов в электродинамике связано с нечетностью спина поля, переносящего взаимодействие. Для полей же четного спина, как в примере Дирака, одноименные заряды всегда притягиваются (ср. силы тяготения).— *Примеч. ред.*

II. К КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ¹,

Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion

Bd 2 (1932), S. 468—479

ON QUANTUM ELECTRODYNAMICS

By P. A. M. Dirac, V. A. Fock and Boris Podolsky

(Received October 25, 1932)

В первой части работы эквивалентность новой формы релятивистской Квантовой Механики²⁾ формулировке Гейзенберга и Паули³⁾ доказывается новым способом, который обладает тем преимуществом, что демонстрирует их физическое соотношение и подсказывает дальнейшее развитие, рассмотренное во второй части работы.

Часть I. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ТЕОРИЙ ДИРАКА И ГЕЙЗЕНБЕРГА — ПАУЛИ

§ 1. Недавно Розенфельд⁴⁾ показал, что новая форма релятивистской Квантовой Механики эквивалентна формулировке Гейзенберга и Паули³⁾.

Доказательство Розенфельда, однако, очень запутано и не выявляет некоторых особенностей соотношения обеих теорий. Чтобы содействовать дальнейшему развитию теории, мы приведем здесь упрощенное доказательство эквивалентности.

Рассмотрим систему с гамильтонианом H , состоящую из двух частей A и B с их соответствующими гамильто-

¹⁾ Перевод с английского В. П. Павлова.

²⁾ *Dirac* // *Proc. Roy. Soc. A.*—1932.—V. 136.—P. 453. (См. статью 10.)

³⁾ *Heisenberg, Pauli* // *Zs. Phys.*—1929.—Bd 56.—S. 1; 1930.—Bd 59.—S. 108.

(Русский перевод: *Паули В.* Труды по квантовой теории поля.—М.: Наука, 1987.—Т. 2.—С. 30 и с. 89.—*Примеч. пер.*)

⁴⁾ *Rosenfeld* // *Zs. Phys.*—1932.—Bd 76.—S. 729.

нианами H_a и H_b и взаимодействием V . Имеем

$$H = H_a + H_b + V, \quad (1)$$

где

$$H_a = H_a(p_a q_a T); \quad H_b = H_b(p_b q_b T); \quad V = V(p_a q_a p_b q_b T)$$

и T — время для полной системы. Волновая функция полной системы будет удовлетворять уравнению ¹⁾

$$\left(H - i\hbar \frac{\partial}{\partial T} \right) \psi(q_a q_b T) = 0 \quad (2)$$

и будет функцией указанных переменных.

После выполнения канонического преобразования

$$\psi^* = e^{\frac{i}{\hbar} H_b T} \psi, \quad (3)$$

при котором динамические переменные, скажем F , преобразуются как

$$F^* = e^{\frac{i}{\hbar} H_b T} F e^{-\frac{i}{\hbar} H_b T} \quad (4)$$

уравнение (2) принимает вид

$$\left(H_a^* + V^* - i\hbar \frac{\partial}{\partial T} \right) \psi^* = 0. \quad (5)$$

Поскольку H_a коммутирует с H_b , то $H_a^* = H_a$. С другой стороны, поскольку функциональные соотношения между переменными не нарушаются каноническим преобразованием (3), V^* — это та же самая функция от преобразованных переменных p^* , q^* , что и V — от p , q . Но p_a и q_a коммутируют с H_b , так что $p_a^* = p_a$, $p_b^* = p_b$. Поэтому

$$V^* = V(p_a q_a p_b^* q_b^*), \quad (6)$$

где

$$q_b^* = e^{\frac{i}{\hbar} H_b T} q_b e^{-\frac{i}{\hbar} H_b T}, \quad p_b^* = e^{\frac{i}{\hbar} H_b T} p_b e^{-\frac{i}{\hbar} H_b T}. \quad (7)$$

В § 7, после развития подходящих обозначений, будет показано, что (7) эквивалентны уравнениям

$$\frac{\partial q_b^*}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} (H_b q_b^* - q_b^* H_b), \quad \frac{\partial p_b^*}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} (H_b p_b^* - p_b^* H_b), \quad (8)$$

где t — отдельное время для части B .

Эти последние, однако, суть в точности уравнения движения для одной части B , не возмущенной присутствием части A .

¹⁾ \hbar — это постоянная Планка, деленная на 2π .

§ 2. Пусть теперь часть B соответствует полю, а часть A — присутствующим частицам. Тогда уравнения (8) должны быть эквивалентны уравнениям Максвелла для пустого пространства. Уравнение (2) будет тогда волновым уравнением теории Гейзенберга—Паули, в то время как (5), в котором возмущение выражено через потенциалы, соответствующие пустому пространству, составит волновое уравнение новой теории. Итак, эта теория соответствует отдельному рассмотрению части системы, что может оказаться более удобным в некоторых случаях¹⁾.

Далее, H_a может быть представлен как сумма гамильтонианов отдельных частиц. Ведь взаимодействие между частицами не включено в H_a , ибо оно принято возникающим из взаимодействия между частицами и полем. Аналогично V — это сумма взаимодействий между полем и частицами. Итак, мы можем написать:

$$H_a = \sum_{s=1}^n (c\alpha_s \cdot p_s + m_s c^2 \alpha_s^{(0)}) = \sum_{s=1}^n H_s$$

(9)

и

$$V^* = \sum_{s=1}^n V_s^* = \sum_{s=1}^n \varepsilon_s [\Phi(r_s, T) - \alpha_s \cdot A(r_s, T)],$$

где r_s — координаты s -й частицы и n — число частиц.

Тогда (5) принимает вид

$$\left[\sum_{s=1}^n (H_s + V_s^*) - ih \frac{\partial}{\partial T} \right] \psi^*(r_s; J; T) = 0, \quad (10)$$

где J стоит для переменных, описывающих поле. Теперь, наряду с общим временем T и временем поля t , будет введено индивидуальное время $t_s = t_1, \dots, t_n$ для каждой частицы. Уравнение (10) будет удовлетворено общим решением системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} & \left(R_s - ih \frac{\partial}{\partial t_s} \right) \psi^* = 0, \\ & R_s = c\alpha_s \cdot p_s + m_s c^2 \alpha_s^{(0)} + e_s [\Phi(r_s, t_s) - \alpha_s \cdot A(r_s, t_s)] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где

и $\psi^* = \psi^*(r_1 r_2 \dots r_n; t_1 t_2 \dots t_n; J)$, если положить в нем все t_s равными общему времени T .

¹⁾ Тут есть известная аналогия с методом, развитым Френкелем для неполных систем, см. *Frenkel // Sow. Phys.* — 1932. — V. 1. — P. 99.

Но уравнения (11)—это уравнения теории Дирака. Они очевидным образом релятивистски инвариантны и образуют обобщение (10). Эта очевидная релятивистская инвариантность достигнута введением отдельного времени для каждой частицы.

§ 3. Для дальнейшего продвижения нам потребуются некоторые формулы квантования электромагнитных полей, и мы будем использовать для этой цели некоторые формулы, полученные Фоком и Подольским¹⁾. Начиная с лагранжевой функции

$$L = \frac{1}{2} (\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{H}^2) - \frac{1}{2} \left(\operatorname{div} A + \frac{1}{c} \dot{\Phi} \right)^2, \quad (12)$$

выбирая в качестве координат (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) потенциалы (Φ, A_1, A_2, A_3) и сохраняя обычные соотношения

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \Phi - \frac{1}{c} \dot{A}, \quad \mathfrak{H} = \operatorname{curl} A, \quad (13)$$

получаем

$$(P_1, P_2, P_3) = P = -\frac{1}{c} \mathfrak{E}, \quad P_0 = -\frac{1}{c} \left(\operatorname{div} A + \frac{1}{c} \dot{\Phi} \right) \quad (14)$$

и гамильтониан

$$H = \frac{c^2}{2} (P^2 - P_0^2) + \frac{1}{2} \sum_{1, 2, 3} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x_2} - \frac{\partial Q_2}{\partial x_1} \right)^2 - cP_0 \sum_{l=1}^3 \frac{\partial Q_l}{\partial x_l} - cP \operatorname{grad} Q_0. \quad (15)$$

Уравнениями движения будут²⁾

$$\begin{aligned} \dot{A} &= c^2 P - c \operatorname{grad} \Phi, \quad \dot{\Phi}_l = -c^2 P_0 - c \operatorname{div} A, \\ \dot{P} &= \Delta A - \operatorname{grad} \operatorname{div} A - c \operatorname{grad} P_0, \quad \dot{P}_0 = -c \operatorname{div} P. \end{aligned} \quad (16)$$

После исключения P и P_0 уравнения (16) дают уравнения Даламбера для потенциалов Φ и A . Чтобы получить уравнения Максвелла для пустого пространства, надо положить $P_0 = 0$. Правила квантования выражаются через амплитуды интеграла Фурье. Итак, пусть для каждой

¹⁾ Fock, Podolsky // Sow. Phys.—1932.— V. 1.— P. 801.— Цитируется в дальнейшем как loc. cit.

Относительно других подходов см. Jordan, Pauli // Zs. Phys.—1928. Bd 47.— S. 151 или Fermi // Rend. Lincei.—1929.— V. 9.— P. 881. Лагранжиан (12) отличается от используемого Ферми только на четырехмерную дивергенцию.

²⁾ Точка над полевой величиной будет использоваться для обозначения производной по отношению к полевому времени t .

$F = F(xyzt)$ введены амплитуды $\bar{F}(k)$ и $\bar{F}^+(k)$ с помощью уравнения

$$F = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int \{F(k) e^{-ic|k|t + ik \cdot r} + F^+(k) e^{+ic|k|t - ik \cdot r}\} dk, \quad (17)$$

где $r = (xyz)$ — вектор положения, $k = (k_x k_y k_z)$ — волновой вектор с величиной $|k| = 2\pi/\lambda$, $dk = dk_x dk_y dk_z$, а интегрирование по каждой компоненте k выполняется от $-\infty$ до $+\infty$. Уравнения движения могут быть записаны через эти амплитуды в виде

$$\begin{aligned} P(k) &= \frac{i}{c} [k\Phi(k) - |k|A(k)] = -\frac{1}{c} \mathcal{E}(k), \\ P_0(k) &= \frac{i}{c} [|k|\Phi(k) - k \cdot A(k)], \end{aligned} \quad (18)$$

а два других уравнения оказываются алгебраическими следствиями этих.

Перестановочными соотношениями для потенциалов будут

$$\begin{aligned} \Phi^+(k)\Phi(k') - \Phi(k')\Phi^+(k) &= \frac{ch}{2|k|} \delta(k-k'), \\ A_l^+(k)A_m(k') - A_m(k')A_l^+(k) &= -\frac{ch}{2|k|} \delta_{lm} \delta(k-k'), \end{aligned} \quad (19)$$

все остальные комбинации амплитуд коммутируют.

Часть II. МАКСВЕЛЛОВ СЛУЧАЙ

§ 4. Для максвеллова случая необходимы следующие дополнительные соображения. Чтобы получить уравнения поля, надо кроме регулярных уравнений движения электромагнитного поля использовать еще и дополнительное условие $P_0 = 0$, или $-cP_0 = \text{div} A + \dot{\Phi}/c = 0$. Это условие не может рассматриваться как квантово-механическое уравнение, скорее, на него надо смотреть как на условие на допустимые ψ -функции. Это можно видеть, например, из того факта, что рассматриваемое как квантовомеханическое уравнение $\text{div} A + \dot{\Phi}/c = 0$ противоречило бы перестановочным соотношениям. Таким образом, как физически допустимые должны рассматриваться только те ψ , которые удовлетворяют условию

$$-cP_0\psi = \left(\text{div} A + \frac{1}{c} \dot{\Phi}\right)\psi = 0. \quad (20)$$

Выраженное через амплитуды, условие (20) принимает, при использовании (18), форму

$$i[k \cdot A(k) - |k|\Phi(k)]\psi = 0$$

$$\text{и} \quad -i [k \cdot A^+(k) - |k| \Phi^+(k)] \psi = 0. \quad (20')$$

К этим уравнениям надо, конечно, присоединить волновое уравнение

$$(H_b - i\hbar \partial/\partial t) \psi = 0, \quad (21)$$

где H_b — гамильтониан поля,

$$H_b = 2 \int \{A^+(k) \cdot A(k) - \Phi^+(k) \Phi(k)\} |k|^2 dk, \quad (22)$$

как и в loc. cit.

Если несколько уравнений, $A\psi = 0$, $B\psi = 0$ и т. д., выполняются одновременно, то $AB\psi = 0$, $BA\psi = 0$ и т. д. и, следовательно, $(AB - BA)\psi = 0$ и т. д. Все такие новые уравнения должны быть следствиями старых, т. е. не должны давать каких-либо новых условий на ψ . Это можно рассматривать как тест на совместность первоначальных уравнений. Применяя это к нашим уравнениям (20') и (21), находим

$$\begin{aligned} P_0(k) P_0^+(k') - P_0^+(k') P_0(k) &= \\ &= c^2 [k \cdot A(k) k' \cdot A^+(k') - k' \cdot A^+(k') k \cdot A(k)] + \\ &+ c^2 |k| |k'| [\Phi(k) \Phi^+(k') - \Phi^+(k') \Phi(k)], \end{aligned} \quad (23)$$

поскольку все A коммутируют со всеми Φ . Применяя теперь правила коммутации (19), получаем

$$\begin{aligned} P_0(k) P_0^+(k') - P_0^+(k') P_0(k) &= \\ &= \frac{c^3 \hbar}{2|k|} \left(\sum_{l,m} k_l k_m \delta_{lm} - |k|^2 \right) \delta(k - k') = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

(24) выполняется вследствие квантовомеханических уравнений, значит

$$[P_0(k) P_0^+(k') - P_0^+(k') P_0(k)] \psi = 0$$

не образует условия на ψ . Итак, условия (20') совместны. Поскольку $P_0(k)$ и $P_0^+(k)$ коммутируют с $\partial/\partial t$, то чтобы проверить совместность условий (20) с (21), нужно проверить условие

$$(H_b P_0 - P_0 H_b) \psi = 0. \quad (25)$$

Поскольку, однако, $\dot{P}_0 = (i/\hbar) (H_b P_0 - P_0 H_b)$, то (25) принимает форму $\dot{P}_0 \psi = 0$, или, в фурье-компонентах,

$$\dot{P}_0(k) \psi = -ic |k| P_0(k) \psi = 0$$

и

$$\dot{P}_0^+(k) \psi = ic |k| P_0^+(k) \psi = 0$$

Но это в точности условия (20'). Итак, условия (20) и (21) совместны.

§ 5. Дополнительное условие (20)—это не уравнение движения, а «связь», наложенная на начальные координаты и скорости, которую уравнения движения сохраняют на все времена. Существование этой связи в максвелловом случае и есть причина для дополнительных соображений, упомянутых в начале § 4. Оказывается, что когда присутствуют частицы, то приходится модифицировать эту связь, чтобы получить что-нибудь, что уравнения движения будут сохранять на все времена.

Условия (20') в том виде, как они записаны, не будут, если применить их к ψ , совместны с (11). Нетрудно, однако, усмотреть, что их можно заменить несколько другим набором условий¹⁾

$$C(k)\psi = 0 \quad \text{и} \quad C^+(k)\psi = 0, \quad (26')$$

где

$$C(k) = i[k \cdot A(k) - |k| \Phi(k)] + \frac{i}{2(2\pi)^{3/2} |k|} \sum_{s=1}^n \varepsilon_s e^{ic|k|t_s - ik \cdot r_s}. \quad (27')$$

Члены в $C(k)$, не входящие в $-cP_0(k)$, являются функциями координат и времени частиц. Они коммутируют с $H_p - ih \partial/\partial t$, с $P_0(k)$ и друг с другом. Поэтому (26') совместны друг с другом и с (21). Остается показать, что (26') совместны с (11). В действительности $C(k)$ и $C^+(k)$ коммутируют с $R_s - ih \partial/\partial t_s$. Покажем это для $C(k)$.

Обозначая обычным образом $AB - BA$ через $[A, B]$, видим, что достаточно показать, что

$$\left[C(k), p_s - \frac{\varepsilon_s}{c} A(r_s t_s) \right] = 0 \quad (28)$$

и

$$\left[C(k), ih \frac{\partial}{\partial t_s} - \varepsilon_s \Phi(r_s t_s) \right] = 0. \quad (29)$$

Учитывая форму $C(k)$, превращаем эти условия в

$$[k \cdot A(k), A(r_s t_s)] - \frac{c}{2(2\pi)^{3/2} |k|} e^{ic|k|t_s} [e^{-ik \cdot r_s}, p_s] = 0 \quad (30)$$

и

$$[|k| \Phi(k), \Phi(r_s t_s)] + \frac{1}{2(2\pi)^{3/2} |k|} e^{-ik \cdot r_s} \left[e^{ic|k|t_s}, ih \frac{\partial}{\partial t_s} \right] = 0 \quad (31)$$

¹⁾ Мы опустим звездочку и будем далее использовать ψ вместо ψ^* .

соответственно. Далее,

$$[k \cdot A(k), A(r_s t_s)] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int [k \cdot A(k), A^+(k')] e^{ic|k'|t_s - ik' \cdot r_s} dk'$$

в силу (17) и благодаря тому, что $A(k)$ коммутирует с $A(k')$. Используя перестановочные соотношения и выполняя интегрирование, получаем

$$\frac{chk}{2(2\pi)^{3/2} |k|} e^{ic|k|t_s - ik \cdot r_s}. \quad (32)$$

С другой стороны,

$$[e^{-ik \cdot r_s}, p_s] = \hbar i \text{grad } e^{-ik \cdot r_s} = \hbar k e^{-ik \cdot r_s}. \quad (33)$$

Итак, условие (30) удовлетворено. Аналогично (31) удовлетворяется благодаря тому, что

$$[|k| \Phi(k), \Phi(r_s t_s)] = \frac{-ch}{2(2\pi)^{3/2}} e^{ic|k|t_s - ik \cdot r_s} \quad (34)$$

и

$$\left[e^{ic|k|t_s}, \hbar i \frac{\partial}{\partial t_s} \right] = ch |k| e^{ic|k|t_s}. \quad (35)$$

Итак, условия (26') удовлетворяют всем требованиям совместности. Можно показать, что эти условия определяют $C(k)$ однозначно с точностью до аддитивной константы, если оно выбирается в виде $i[k \cdot A(k) - |k| \Phi(k)] + f(r_s t_s)$.

§ 6. Покажем теперь, что введение отдельных времен для поля и для каждой частицы позволяет использовать всю развитую в § 3 и в loc. cit. электродинамику вакуума с теми изменениями, которые обсуждались в § 5. Действительно, мы покажем, что *максвелловы уравнения* электродинамики, в которые входят ток или плотность заряда, становятся *условиями* на ψ -функцию.

Для удобства соберем вместе основные уравнения.

Уравнения вакуумной электродинамики:

$$\mathfrak{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \dot{A}, \quad \mathfrak{H} = \text{curl } A, \quad (13)$$

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \ddot{\Phi} = 0, \quad \Delta A - \frac{1}{c^2} \ddot{A} = 0. \quad (36)$$

Уравнения для волновой функции:

$$\left. \begin{aligned} (R_s - \hbar i \frac{\partial}{\partial t_s}) \psi &= 0, \\ \text{где} \\ R_s &= c\alpha_s \cdot p_s + m_s c^2 \alpha_s^{(4)} - \varepsilon_s \alpha_s \cdot A(r_s t_s) + \varepsilon_s \Phi(r_s t_s). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Дополнительные условия на ψ -функцию:

$$C(k)\psi = 0 \quad \text{и} \quad C^+(k)\psi = 0, \quad (26')$$

где

$$C(k) = i[k \cdot A(k) - |k| \Phi(k)] + \frac{i}{2(2\pi)^{3/2} |k|} \sum_{s=1}^n \varepsilon_s e^{ic|k|t_s - ik \cdot r_s}, \quad (27')$$

Преобразуем два последних уравнения, переходя от амплитуд $C(k)$ и $C^+(k)$ к $C(r, t)$ с помощью (17). Получим

$$C(r, t)\psi = 0 \quad (26)$$

и

$$C(r, t) = \operatorname{div} A + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \sum_{s=1}^n \frac{\varepsilon_s}{4\pi} \Delta(X - X_s), \quad (27)$$

где X и X_s — четырехмерные векторы: $X = (xyzt)$, $X_s = (x_s y_s z_s t_s)$, а Δ — так называемая инвариантная дельта-функция¹⁾

$$\Delta(X) = \frac{1}{|r|} [\delta(|r| + ct) - \delta(|r| - ct)]. \quad (37)$$

Из (13) немедленно следует, что

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{curl} \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{H} = 0, \quad (38)$$

так что они остаются квантово-механическими уравнениями. Используя уравнения (13) и (36) и условие (26), получаем прямым вычислением

$$\left(\operatorname{curl} H - \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \right) \psi = \operatorname{grad} \left(\sum_{s=1}^n \frac{\varepsilon_s}{4\pi} \Delta(X - X_s) \right) \psi \quad (39)$$

и

$$(\operatorname{div} E) \psi = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} \sum_{s=1}^n \frac{\varepsilon_s}{4\pi} \Delta(X - X_s) \right) \psi. \quad (40)$$

Рассмотрим теперь, что получится из этих уравнений, если мы положим $t = t_1 = t_2 = \dots = t_n = T$, что подразумевается в уравнениях Максвелла и что мы будем записывать кратко как $t_s = T$.

Для некоторой величины $f = f(t_1 t_2 \dots t_n)$:

$$\frac{\partial f(TTT \dots T)}{\partial T} = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial t_1} \right) + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial t_n} \right) \right]_{t_s = T}, \quad (41)$$

¹⁾ См. Jordan, Pauli // Zs. Phys.,—1928.— Bd 47,— S. 159.

а для каждой из n производных $\partial/\partial t_s$ у нас есть уравнение движения

$$\frac{\partial f}{\partial t_s} = \frac{i}{\hbar} (R_s f - f R_s). \quad (42)$$

Если мы положим $f = A(rt)$ или $f = \Phi(rt)$, то, поскольку оба коммутируют с R_s , будет $\partial f/\partial t_s = 0$, и мы получим

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial T} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial T}. \quad (43)$$

Следовательно,

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial T} - \text{grad } \Phi, \quad \mathfrak{H} = \text{curl } A, \quad (44)$$

т. е. форма связи между полями и потенциалами сохраняется. Учитывая, что для $t = t_1$ будет $\Delta(X - X_s) = 0$ и поэтому $\text{grad } \Delta(X - X_s) = 0$, и используя (26), (39) и (40), получим

$$\left(\text{div } A + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right) \psi = 0, \quad (45)$$

$$\left(\text{curl } \mathfrak{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \right)_{t_s=T} \psi = 0 \quad (46)$$

и

$$(\text{div } \mathfrak{E}) \psi = - \sum_{s=1}^n \frac{\varepsilon_s}{4\pi} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Delta(X - X_s) \right] \psi. \quad (47)$$

Для дальнейшего упрощения (46) надо использовать (41) и (42), откуда следует, что

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial T} \right)_{t_s=T} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial T} - \sum_{s=1}^n \frac{i}{\hbar c} [R_s, \mathfrak{E}], \quad (48)$$

а $[R_1, \mathfrak{E}]$ сосчитать легко, поскольку единственный член в R_s , который не коммутирует с \mathfrak{E} , это $-\varepsilon_s \alpha_s \cdot A(r_s t_s)$, а $-\mathfrak{E}/c$ есть сопряженный A импульс. На этом пути получаем

$$[R_s, \mathfrak{E}] = i\hbar \varepsilon_s \alpha_s \delta(r - r_s). \quad (49)$$

Для упрощения уравнения (47) надо только вспомнить¹⁾, что

$$\left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Delta(X) \right]_{t=0} = -4\pi \delta(r). \quad (50)$$

¹⁾ Heisenberg, Pauli // Zs. Phys.—1929.— Bd 56.— S. 34,

Итак, (46) и (47) превращаются в

$$\left(\text{curl } \mathfrak{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial T} \right) \psi = \sum_{s=1}^n \varepsilon_s \alpha_s \delta(r - r_s) \quad (51)$$

и

$$(\text{div } \mathfrak{E}) \psi = \sum_{s=1}^n \varepsilon_s \delta(r - r_s) \psi, \quad (52)$$

т. е. в точности в оставшиеся уравнения Максвелла, появившиеся теперь как условия на ψ . Уравнение (52) есть дополнительное условие в теории Гейзенберга — Паули.

§ 7. Теперь мы выведем уравнения (8) из § 1. Того ради надо вспомнить, что преобразование (7) — это каноническое преобразование, которое сохраняет вид алгебраических связей между переменными, равно как и уравнения движения. Последние запишутся в развитых теперь точных обозначениях как

$$\frac{\partial q_b^*}{\partial T} = \frac{i}{\hbar} [H^*, q_b^*]_{t_s=T}, \quad \frac{\partial p_b^*}{\partial T} = \frac{i}{\hbar} [H^*, p_b^*]_{t_s=T}. \quad (53)$$

Как мы убедились в следовавших за (5) рассуждениях,

$$H^* = H_a + H_b + V^*, \quad (54)$$

и, поскольку q_b и p_b коммутируют с H_a , то q_b^* и p_b^* коммутируют с H_a^* и, следовательно, с H_a . Поэтому уравнения (53) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_b^*}{\partial T} &= \frac{i}{\hbar} \{ [H_b, q_b^*] + [V^*, q_b^*] \}_{t_s=T}, \\ \frac{\partial p_b^*}{\partial T} &= \frac{i}{\hbar} \{ [H_b, p_b^*] + [V^*, p_b^*] \}_{t_s=T}. \end{aligned} \quad (55)$$

С другой стороны, из (41) и (42)

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_b^*}{\partial T} &= \left\{ \frac{\partial q_b^*}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \sum_{s=1}^n [R_s, q_b^*] \right\}_{t_s=T}, \\ \frac{\partial p_b^*}{\partial T} &= \left\{ \frac{\partial p_b^*}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \sum_{s=1}^n [R_s, p_b^*] \right\}_{t_s=T}. \end{aligned} \quad (56)$$

Но единственный член в R_s , не коммутирующий с p_b и q_b^* — это V_s^* , так что

$$[R_s, q_b^*] = [V_s^*, q_b^*] \quad \text{и} \quad [R_s, p_b^*] = [V_s^*, p_b^*]. \quad (57)$$

Поскольку $\sum V_s^* = V^*$, то (56) превращаются в

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_b^*}{\partial T} &= \left\{ \frac{\partial q_b^*}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [V^*, q_b^*] \right\}_{t_s=T}, \\ \frac{\partial p_b^*}{\partial T} &= \left\{ \frac{\partial p_b^*}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [V^*, p_b^*] \right\}_{t_s=T}.\end{aligned}\quad (58)$$

Сравнение (55) с (58) дает окончательно:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial q_b^*}{\partial t} \right)_{t=T} &= \frac{i}{\hbar} [H_b, q_b^*]_{t=T}, \\ \left(\frac{\partial p_b^*}{\partial t} \right)_{t=T} &= \frac{i}{\hbar} [H_b, p_b^*]_{t=T},\end{aligned}\quad (59)$$

что как раз и есть уравнение (8), в более точных обозначениях.

Кембридж, Ленинград, Харьков

От редактора перевода: В 1957 г., в сборнике своих работ по квантовой теории поля В. А. Фок сделал к этой статье два примечания:

К уравнению (3).

Каноническое преобразование (3) следует, строго говоря, писать в виде $\psi^* = S\psi$, где S есть унитарный оператор, представляющий решение уравнения

$$-i\hbar S^{-1} \frac{\partial S}{\partial T} = H_b.$$

При этом используемое в тексте соотношение $SH_b - H_bS = 0$ остается в силе. Оператор S имеет вид $S = e^{\frac{i}{\hbar} H_b T}$ только в том случае, когда H_b не зависит явно от T .

К началу § 7.

Символы $\frac{\partial q}{\partial T}$, $\frac{\partial q}{\partial t}$, $\frac{\partial q}{\partial t_s}$ и т. д., написанные с круглыми ∂ , означают здесь частные производные в том смысле, что производные эти берутся по разным переменным T , t или t_s , но не в смысле явной зависимости оператора q от соответствующей переменной. Если писать производные в этом последнем смысле с буквой δ , то выражение, называемое обычно «полной» производной оператора q по времени, напишется как

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\delta q}{\delta t} + \frac{i}{\hbar} (Hq - qH).$$

(Заметим, что в этом выражении обычно пишут d вместо ∂ и δ вместо δ .)

12. ЛАГРАНЖИАНЫ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ ¹⁾

Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion
Bd 3 (1933), S. 64—72

THE LAGRANGIAN IN QUANTUM MECHANICS

By P. A. M. DIRAC

(Received November 19, 1932)

Квантовая механика была построена на основании аналогии с гамильтоновой теорией классической механики. Так получилось оттого, что классические понятия канонической координаты и импульса, как оказалось, имеют очень простые квантовые аналоги и в результате этого вся классическая гамильтонова теория, являющаяся структурой, целиком построенной на этих понятиях, может быть перенесена во всех деталях в квантовую механику.

Но есть альтернативная формулировка классической динамики, задаваемая лагранжианом. Она записывается в терминах координат и скоростей вместо координат и импульсов. Эти две формулировки, конечно, тесно связаны, однако есть основания полагать, что лагранжева формулировка более фундаментальна.

Во-первых, лагранжев метод позволяет собрать вместе все уравнения движения и выразить их в виде свойства стационарности некоторой функции действия. (Эта функция действия есть в точности интеграл лагранжиана по времени.) Соответствующего принципа действия в терминах координат и импульсов гамильтоновой теории не существует. Во-вторых, лагранжев метод легко выражается релятивистски, поскольку функция действия есть релятивистский инвариант; в то же время гамильтонов метод существенно не релятивистский по форме, так как в нем выделена частная временная переменная, канонически сопряженная к функции Гамильтона.

По этим причинам представляется желательным поднять вопрос, что в квантовой теории отвечает лагранжеву

¹⁾ Перевод с английского М. К. Поливанова.

методу теории классической. Небольшое размышление, однако, показывает, что нельзя ожидать, что классические лагранжевы уравнения сколько-нибудь непосредственно могут быть перенесены в квантовую механику. Эти уравнения включают частные производные лагранжиана по координатам и импульсам, а в квантовой механике этим производным нельзя придать никакого смысла. Единственный процесс дифференцирования по динамическим переменным, который можно перенести в квантовую механику—это скобки Пуассона, что немедленно приводит к гамильтоновой теории¹⁾.

Мы должны поэтому искать нашу квантовую лагранжеву теорию каким-либо окольным путем. Мы должны постараться перенести *идеи* классической лагранжевой теории, а не *уравнения* классической лагранжевой теории.

Контактные преобразования

Лагранжева теория тесно связана с теорией контактных преобразований. Поэтому мы начнем с обсуждения аналогии между классическими и квантовыми контактными преобразованиями. Пусть два набора переменных будут p_r, q_r и P_r, Q_r ($r=1, 2, \dots, n$) и предположим, что все q и Q независимы, так что любая функция динамических переменных может быть через них выражена. Хорошо известно, что в классической теории преобразований уравнения для этого случая могут быть записаны в виде

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial q_r}, \quad P_r = -\frac{\partial S}{\partial Q_r}, \quad (1)$$

где S —некоторая функция q и Q .

В квантовой теории можно выбрать представление, в котором q диагональны, и второе представление, в ко-

¹⁾ Процесс частного дифференцирования по матрицам был разработан Борном, Гейзенбергом и Иорданом (*Born, Heisenberg, Jordan // Zs Phys.—1926.—Vd 35. S. 561*), но этот процесс не дает возможности дифференцирования по динамическим переменным, поскольку он не независим от избранного представления. Как пример трудностей при дифференцировании по квантовым динамическим переменным рассмотрим три компоненты момента, удовлетворяющих условию

$$m_x m_y - m_y m_x = i\hbar m_z.$$

Мы имеем здесь явное выражение m_z через m_x и m_y , однако не можем придать никакого смысла его частной производной по m_x или m_y .

тором диагональны Q . Будет существовать функция преобразования, связывающая эти два представления. Мы теперь покажем, что эта функция преобразования есть квантовый аналог величины $e^{iS/\hbar}$.

Если α есть некоторая функция динамических переменных в квантовой теории, то она будет иметь «смешанного» представителя $(q' | \alpha | Q')$, который может быть определен через любой из обычных представителей $(q' | \alpha | q'')$, $(Q' | \alpha | Q'')$ посредством

$$(q' | \alpha | Q') = \int (q' | \alpha | q'') dq'' (q'' | Q') = \int (q' | Q'') dQ'' (Q'' | \alpha | Q').$$

Из первого из этих уравнений получим

$$(q' | q_r | Q') = q_r (q' | Q'), \quad (2)$$

$$(q' | p_r | Q') = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_r} (q' | Q'), \quad (3)$$

а из второго —

$$(q' | Q_r | Q') = Q_r (q' | Q'), \quad (4)$$

$$(q' | P_r | Q') = i\hbar \frac{\partial}{\partial Q_r} (q' | Q'). \quad (5)$$

Отметим разные знаки в (3) и (5).

Уравнения (2) и (4) можно обобщить следующим образом. Пусть $f(q)$ — любая функция всех q , а $g(Q)$ — любая функция всех Q . Тогда

$$\begin{aligned} (q' | f(q) g(Q) | Q') &= \\ &= \iint (q' | f(q) | q'') dq'' (q'' | Q') dQ'' (Q'' | g(Q) | Q') = \\ &= f(q') g(Q') (q' | Q') \end{aligned}$$

Далее, если $f_k(q)$ и $g_k(Q)$ ($k=1, 2, \dots, m$) означают два набора функций от q и от Q соответственно, то

$$(q' | \sum_k f_k(q) g_k(Q) | Q') = \sum_k f_k(q') g_k(Q') (q' | Q').$$

Стало быть, если α — любая функция динамических переменных и мы предполагаем, что она выражена в виде функций $\alpha(qQ)$ переменных q и Q «хорошо упорядоченным» образом, так что она состоит из суммы членов вида $f(q)g(Q)$, то мы получим

$$(q' | \alpha(qQ) | Q') = \alpha(q'Q') (q' | Q'). \quad (6)$$

Это в некотором смысле замечательное уравнение, потому что оно дает нам связь между $\alpha(qQ)$, которая есть функция операторов и $\alpha(q'Q')$, которая является функцией численных переменных,

Применим этот результат к $\alpha = p_r$. Положив

$$(q' | Q') = e^{iU/\hbar}, \quad (7)$$

где U — новая функция q' и Q' , мы найдем из (3)

$$(q' | p_r | Q') = \frac{\partial U(q'Q')}{\partial q_r'} (q' | Q').$$

Сравнивая это с (6), получим

$$p_r = \frac{\partial U(qQ)}{\partial q_r}$$

в качестве уравнения на операторы или динамические переменные, которое выполняется, коль скоро $\partial U/\partial q_r$ хорошо упорядочен. Подобным образом, применяя (6) при $\alpha = P_r$ и пользуясь (5), мы получим

$$P_r = - \frac{\partial U(qQ)}{\partial Q_r},$$

если $\partial U/\partial Q_r$ хорошо упорядочен. Эти уравнения имеют тот же вид, что (1), и показывают, что U , определенная в (7), есть аналог классической функции S , что мы и собирались доказать.

Кстати, мы попутно доказали другую теорему, а именно, что уравнение (1) выполняется и в квантовой теории при условии, что правые стороны правильно интерпретируются: переменные рассматриваются при дифференцировании как классические и производные хорошо упорядочены. Эта теорема была уже доказана Йорданом иным методом¹⁾.

Лагранжиан и принцип действия

Уравнения движения классической теории приводят к тому, что динамические переменные изменяются таким образом, что их значения q_t, p_t в произвольный момент t связаны с их значениями q_T, p_T в любой другой момент времени T контактным преобразованием, которое можно записать в форме (1), где $q, p = q_t, p_t$; $Q, P = q_T, p_T$ и S равно интегралу по времени лагранжиана в промежутке от T до t . В квантовой теории q_t, p_t по-прежнему связаны с q_T, p_T контактным преобразованием и существует функция преобразования $(q_t | q_T)$, связывающая два представления, в которых соответственно q_t и q_T диагональны. Работа, проделанная в предыдущем разделе, показывает,

¹⁾ Jordan // Zs. Phys.— 1926.— Bd 38.— S. 513.

что

$$(q_t | q_T) \text{ соответствует } \exp \left[i \int_T^t L dt / \hbar \right], \quad (8)$$

где L — лагранжиан. Если T лишь бесконечно мало отличается от t , мы получаем, что

$$(q_{t+dt} | q_t) \text{ соответствует } \exp [iL dt / \hbar]. \quad (9)$$

Функции преобразования в (8) и (9) — очень фундаментальное понятие квантовой теории, и весьма важно, что мы обнаружили, что их классические аналоги просто выражаются через лагранжиан. Это есть естественное расширение хорошо известного результата, что фаза волновой функции соответствует функции действия гамильтонова принципа в классической теории. Аналогия (9) подсказывает, что мы должны рассматривать классический лагранжиан не как функцию координат и скоростей, а скорее как функцию координат в момент t и координат в момент $t + dt$.

Для упрощения дальнейшего рассмотрения в этом разделе мы ограничимся случаем одной степени свободы, хотя вся аргументация применима и в общем случае. Мы будем пользоваться обозначением

$$\exp \left[i \int_T^t L dt / \hbar \right] = A(tT),$$

так что $A(tT)$ есть классический аналог $(q_t | q_T)$.

Предположим, что мы разделили интервал $T \rightarrow t$ на большое число малых отрезков $T \rightarrow t_1, t_1 \rightarrow t_2, \dots, t_{m-1} \rightarrow t_m, t_m \rightarrow t$ путем введения последовательности промежуточных моментов времени t_1, t_2, \dots, t_m . Тогда

$$A(tT) = A(t t_m) A(t_m t_{m-1}) \dots A(t_2 t_1) A(t_1 T). \quad (10)$$

Далее, в квантовой теории имеем

$$(q_t | q_T) = \int (q_t | q_m) dq_m (q_m | q_{m-1}) dq_{m-1} \dots (q_2 | q_1) dq_1 (q_1 | q_T), \quad (11)$$

где q_k обозначает q в промежуточный момент времени t_k ($k = 1, 2, \dots, m$). На первый взгляд, уравнение (11) не совсем похоже на уравнение (10), потому что в правой части (11) приходится еще интегрировать после перемножения, в то время как в правой части (10) никакого интегрирования нет

Изучим это отличие, рассмотрев, что происходит с (11), когда мы считаем \hbar весьма малой величиной. Из результатов (8) и (9) видно, что подинтегральное выражение в (11) должно иметь вид $e^{iF/\hbar}$, где F — функция $q_T, q_1, q_2, \dots, q_m, q_t$, которая остается конечной, когда \hbar стремится к нулю. Представим себе теперь, что одно из промежуточных q — скажем, q_k — непрерывно меняется, в то время как другие остаются фиксированными. Вследствие малости \hbar величина F/\hbar будет тогда меняться очень быстро. Это значит, что $e^{iF/\hbar}$ будет меняться периодически с очень большой частотой вокруг нулевого значения, вследствие чего интеграл будет практически нулевым. Единственно существенной областью интегрирования по q_k , таким образом, будет та, где сравнительно большие вариации q_k приводят только к весьма незначительной вариации F . Эта область есть окрестность точки, в которой F стационарна относительно малой вариации q_k .

Мы можем применить это рассуждение к каждой переменной интегрирования в правой части (11) и получить в результате, что единственная существенная область интегрирования есть та, в которой F стационарна при малых вариациях всех промежуточных q . Но, применяя (8) к каждому малому отрезку времени, мы увидим, что F имеет в качестве своего классического аналога

$$\int_{t_m}^t L dt + \int_{t_{m-1}}^{t_m} L dt + \dots + \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_T^{t_1} L dt = \int_T^t L dt,$$

т. е. в точности функцию действия, от которой в классической механике требуется, чтобы она была стационарна при малых вариациях всех промежуточных q . Это показывает, каким образом уравнение (11) переходит в классический результат, когда \hbar становится весьма малым.

Вернемся теперь к общему случаю, когда \hbar не мало. Мы видим, что для сравнения с квантовой теорией уравнение (10) надо интерпретировать следующим образом. Каждая из величин A должна рассматриваться как функция двух q в два момента времени, к которым она относится. Таким образом, правая часть равенства оказывается функцией не только q_T и q_t , но и q_1, q_2, \dots, q_m , и для того чтобы извлечь из них функцию только q_T и q_t , которую можно было бы приравнять к левой части, мы должны подставить вместо q_1, q_2, \dots, q_m их значения, определяемые из принципа действия. Этот процесс под-

становки промежуточных q отвечает тогда процессу интегрирования по всем значениям этих q в (11).

Уравнение (11) содержит квантовый аналог принципа действия, в чем можно убедиться из следующего рассуждения. Из уравнения (11) можно извлечь утверждение (довольно тривиальное), что если мы возьмем фиксированные значения для q_T и q_t , то важность рассмотрения любого набора значений для промежуточных q будет определяться важностью этого набора при интегрировании в правой части (11). Если мы теперь устремим \hbar к нулю, это утверждение перейдет в классическое утверждение: если выбраны фиксированные значения q_T и q_t , то важность рассмотрения любого набора значений промежуточных q нулевая, если только эти значения не делают функцию действия стационарной. Это утверждение есть один из способов формулировать классический принцип действия.

Применение к динамике поля

Задачу о колебаниях в среде можно описывать в классической теории с помощью лагранжевых методов, которые будут естественным обобщением этих методов для частиц. Мы выбираем в качестве координат подходящие полевые величины или потенциалы. Каждая координата есть тогда функция четырех пространственно-временных переменных x, y, z, t , что соответствует функции только одной переменной t в теории частиц. Значит, одна независимая переменная t теории частиц обобщается на четыре независимые переменные x, y, z, t^1 .

Мы вводили в каждой точке пространства-времени лагранжеву плотность, которая должна быть функцией координат и их первых производных по x, y, z и t , что соответствует тому, что лагранжиан в теории частиц есть функция координат и скоростей. Интеграл лагранжевой плотности по любой (четырёхмерной) области простран-

¹⁾ В полевой динамике принято рассматривать значения полевой величины при двух различных значениях (x, y, z) , но при одном и том же t , как две различные координаты, а не как два значения одной и той же координаты для двух разных точек в области изменения независимых переменных и, тем самым, держаться идеи о единственной независимой координате t . Такая точка зрения необходима при гамильтоновом рассмотрении, но в лагранжевой картине принятая здесь точка зрения кажется предпочтительнее в связи с ее большей пространственно-временной симметрией.

ства-времени должен быть стационарным относительно всех малых вариаций координат внутри области при условии, что координаты на границе остаются неизменными.

Теперь легко видеть, каким должен быть квантовый аналог всего этого. Если S обозначает интеграл классической лагранжевой плотности по частной области пространства-времени, мы должны ожидать, что существует квантовый аналог величины $e^{iS/\hbar}$, соответствующий величине $(q_t|q_T)$ в теории частиц. Эта $(q_t|q_T)$ есть функция значений координат на концах временного интервала, к которому она относится, и поэтому мы должны ожидать, что квантовый аналог $e^{iS/\hbar}$ будет функцией (на самом деле функционалом) значений координат на границе пространственно-временной области. Этот квантовый аналог будет своего рода «обобщенной функцией преобразования». Он не может, вообще говоря, пониматься подобно $(q_t|q_T)$, в смысле функции преобразования от одного набора динамических переменных к другому, но, тем не менее, это четырехмерное обобщение величины $(q_t|q_T)$ в следующем смысле.

Закону композиции для $(q_t|q_T)$

$$(q_t|q_T) = \int (q_t|q_1) dq_1 (q_1|q_T) \quad (12)$$

будет отвечать следующий закон композиции для обобщенной функции преобразования (о. ф. п.). Возьмем данную область пространства-времени и разделим ее на две части. Тогда о. ф. п. всей области будет равна произведению о. ф. п. ее двух частей, проинтегрированному по всем значениям координат общей границы двух частей.

Повторное применение закона (12) дает нам формулу (II), а повторное применение соответствующего закона для о. ф. п. позволит нам подобным образом связать о. ф. п. для любой области с о. ф. п. для всех очень малых подобластей, на которые можно разбить эту область. Эта связь будет содержать квантовый аналог принципа действия в применении к полю.

Квадрат модуля функции преобразования $(q_t|q_T)$ может пониматься как вероятность того, что измерение координаты в более поздний момент t дает результат q_t , если состояние таково, что в более ранний момент T измерение координаты в нем с достоверностью давало результат q_T . Квадрат модуля о. ф. п. будет иметь соответствующий смысл только тогда, когда о. ф. п. относится к области пространства-времени, ограниченной двумя различными (трехмерными) поверхностями, каждая из которых простирается

до бесконечности в пространственном направлении и целиком лежит вне любого светового конуса с вершиной на этой поверхности. Квадрат модуля о. ф. п. тогда дает вероятность того, что координаты имеют предписанные значения во всех точках более поздней поверхности для такого состояния, о котором известно, что они имели определенные значения во всех точках более ранней поверхности. В этом случае о. ф. п. может рассматриваться как функция преобразования, связывающая значения координат и импульсов на одной из поверхностей с их значениями на другой.

Альтернативно можно рассматривать $|(q_t|q_T)|^2$, как задающий *a priori* вероятность любого состояния, дающего результаты q_T и q_t , когда измерения q производятся в моменты времени t и T (здесь принято во внимание, что более раннее измерение изменяет состояние и воздействует на более позднее измерение). Соответственно мы можем рассматривать квадрат модуля о. ф. п. для любой области пространства-времени как задающий *a priori* вероятность предписанных результатов, когда измеряются координаты всех точек границы. Эта интерпретация более общая, чем рассмотренная ранее, так как она не требует ограничений на форму пространственно-временной области.

13. ТЕОРИЯ ПОЗИТРОНА ¹⁾

*Septième Conseil de Physique Solvay:
Structure et propriétés des noyaux atomiques
22—29 October 1933
Paris: Gauthier-Villars, 1934,— pp. 203—212*

THÉORIE DU POSITRON

Par M. P.-A.-M. DIRAC

Недавнее открытие положительного электрона или позитрона вновь привлекло внимание к уже успевшей состариться теории о состояниях электрона с отрицательными энергиями, так как полученные до сих пор экспериментальные результаты согласуются с ее предсказаниями.

Вопрос об отрицательных энергиях возник из изучения движения частицы сообразно ограниченному принципу относительности. В нерелятивистской механике энергия W частицы задается в функции ее скорости v или же количества движения p формулой

$$W = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2m} p^2,$$

чему отвечают всегда положительные W ; однако в релятивистской механике требуется заменить эти формулы на

$$W^2 = m^2c^4 + c^2p^2,$$

или

$$W = c \sqrt{m^2c^2 + p^2},$$

что позволяет энергии W быть как положительной, так и отрицательной.

Обычно принимают дополнительную гипотезу, что энергия W должна всегда быть положительной. Это допустимо в классической теории, где величины всегда изменяются непрерывным образом и где W , следовательно, никогда не сможет перейти от одного из своих положительных

¹⁾ Перевод с французского В. П. Шелеста,

значений, которое должно быть $\geq mc^2$, к одному из своих отрицательных значений, которое должно быть $\leq -mc^2$. Напротив, в квантовой теории переменная может испытывать разрывные изменения такого рода, что W может перейти от положительного значения к отрицательному. Не оказалось возможным развить релятивистскую квантовую теорию электрона, в которой переходы от положительного значения энергии к ее отрицательному значению были бы исключены. Итак, невозможно более допускать, что энергия всегда положительна, без того, чтобы это привело к непоследовательностям в теории.

При этих условиях остаются открытыми две возможности. Или мы должны найти физический смысл для состояний с отрицательной энергией, или же должны признать, что релятивистская квантовая теория неточна в той мере, в какой она предсказывает переходы между состояниями с положительной и отрицательной энергиями. Однако подобные переходы, вообще говоря, предсказываются для всех процессов, включающих обмены энергией порядка mc^2 , и, по-видимому, нет никаких принципиальных доводов против применимости современной квантовой механики к подобным обменам энергией. Эта механика, правда, не кажется применимой к явлениям, в которых выступают расстояния порядка классического радиуса электрона e^2/mc^2 , поскольку нынешняя теория не может никоим образом объяснить структуру электрона, однако такие расстояния, рассматриваемые как электронные длины волн, соответствуют энергиям порядка $(\hbar/e^2)mc^2$, т. е. много большим, нежели обмены, о которых идет речь. Поэтому представляется, что наиболее разумное решение — искать физический смысл для состояний с отрицательной энергией.

Электрон в состоянии с отрицательной энергией — это объект, совершенно чуждый нашему опыту, который, тем не менее, можно изучать с теоретической точки зрения; в частности, мы можем предсказать его движение в любом заданном электромагнитном поле. Результат выполнения расчета, будь то в классической механике, будь то в квантовой теории, состоит в том, что электрон с отрицательной энергией отклоняется полем в точности так, как это было бы с электроном с положительной энергией, если бы он имел положительный электрический заряд $+e$ вместо обычного отрицательного заряда $-e$.

Этот результат сразу же внушает мысль о сходстве между электроном с отрицательной энергией и позитроном. Возникает соблазн принять, что электрон в состоянии

с отрицательной энергией как раз и образует позитрон, однако это неприемлемо, поскольку наблюдаемый позитрон несомненно не имеет отрицательной кинетической энергии.

Можно получить лучший результат, используя принцип исключения Паули, в силу которого данное квантовое состояние не могут занимать два и более электрона. Допустим, что во Вселенной, как мы ее себе представляем, почти все состояния с отрицательной энергией заняты электронами, и созданное таким образом распределение недоступно нашему наблюдению вследствие его однородности на всем протяжении пространства. При этих условиях всякое незанятое состояние отрицательной энергии, представляющее собой нарушение этой однородности, должно проявляться при наблюдении в виде своего рода дырки. Можно допустить, что эти дырки образуют позитроны.

Эта гипотеза разрешает основные трудности в интерпретации состояний с отрицательной энергией. Дырка в распределении электронов отрицательной энергии имеет положительную энергию, поскольку она соответствует локальному недостатку отрицательной энергии. Более того, эта дырка движется в любом электромагнитном поле точно так же, как и электрон, необходимый, чтобы ее заполнить. Мы можем извлечь отсюда два следствия: прежде всего движение дырки можно представить волновой функцией Шредингера, аналогичной функции, представляющей движение электрона, и, затем, дырка ведет себя в поле точно так же, как положительный электрон с положительной энергией. Таким образом, дырка в точности подобна обычной положительно электризованной частице, и ее отождествление с позитроном представляется вполне правдоподобным.

Если наша гипотеза верна, то мы должны суметь вывести из нее какое-то количество экспериментально проверяемых следствий. Прежде всего, масса позитрона должна быть в точности равна массе электрона, а его заряд должен быть в точности противоположен заряду электрона. Кроме того, мы можем предсказать некоторые результаты, касающиеся рождения и исчезновения позитронов.

Обычный электрон с положительной энергией не может перепрыгнуть ни в одно из занятых состояний отрицательной энергии вследствие принципа Паули; напротив, он может перепрыгнуть в дырку и заполнить ее. Таким образом, электрон и позитрон могут взаимно уничтожиться. Их энергия должна возродиться в форме фотонов, и из

законов сохранения энергии и импульса следует, что должны возникнуть по меньшей мере два фотона. Можно рассчитать вероятность протекания такого процесса и тем самым получить вероятное время жизни позитрона, движущегося через данное распределение электронов. В результате среднее время жизни позитрона, медленно движущегося в воздухе при атмосферном давлении, составляет $3 \cdot 10^{-7}$ с, причем оно возрастает при увеличении скорости. Полученное таким образом значение по порядку величины совместимо с экспериментом, поскольку оно достаточно велико, чтобы позволить быстрому позитрону пересечь конденсационную камеру Вильсона, как правило, не уничтожившись, и достаточно мало, чтобы позитроны не были объектами, обычно присутствующими в лаборатории.

Электрон и позитрон могут взаимно проаннигилировать, породив один-единственный фотон, если есть атомное ядро, чтобы поглотить освобождающийся импульс. Обратный процесс состоит в образовании позитрона и электрона в результате встречи одного фотона достаточно высокой энергии с атомным ядром. Его можно представить себе как фотоэлектрический эффект на одном из электронов отрицательной энергии, описывающем гиперболическую орбиту по соседству с ядром; этот электрон, будучи поднят в состояние положительной энергии, проявляется как обычный электрон, в то время как оставшаяся после него дырка ведет себя подобно позитрону. Вероятность появления такого процесса была приближенно рассчитана Оппенгеймером и независимо Пайерлсом; результат по порядку величины согласуется с наблюдениями, касающимися образования позитронов жесткими γ -лучами, падающими на тяжелые ядра.

Чтобы развить предложенную нами концепцию состояний отрицательной энергии в полную теорию, мы должны рассмотреть не только движение электронов и дырок в поле, но и то, как электромагнитное поле создается электронами и дырками. Для этого необходимо ввести новую гипотезу, поскольку обычная концепция, согласно которой каждый электронный заряд — e дает вклад в электрическую плотность ρ , определяющую электрическое поле E согласно уравнению Максвелла

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho, \quad (1)$$

явно привела бы к полю, бесконечному в каждой точке.

Примем ту гипотезу, что распределение электронов, в котором не занято ни одно из состояний с положительной энергией, но заняты все состояния с отрицательной энергией, не создает никакого поля и что именно отклонения от этого распределения определяют поле в соответствии с уравнением (1). Согласно этой гипотезе занятое состояние с положительной энергией создает поле, соответствующее отрицательному заряду $-e$, а незанятое состояние отрицательной энергии создает поле, соответствующее положительному заряду $+e$. Итак, мы получили новое свойство дырок, говорящее в пользу правдоподобности нашего уподобления этих дырок позитронам.

Новая гипотеза вполне удовлетворительна, пока речь идет об области пространства, где не существует никакого поля и где четко определяется различие между состояниями положительной и отрицательной энергии; однако когда речь заходит об областях пространства, в которых электромагнитное поле отлично от нуля, эту гипотезу следует уточнить, чтобы она могла вести к результатам, свободным от всякой двусмысленности. Надо указать математически точно, какое именно распределение электронов предположено не создающим никакого поля, и дать также правило для вычитания этого распределения из того, которое эффективно существует во всякой конкретной задаче, таким способом, чтобы получить конечную разность, которая могла бы фигурировать в (1), ибо, вообще говоря, математическая операция вычитания одной бесконечности из другой не свободна от произвола.

Для общего случая произвольного электромагнитного поля этот вопрос не был еще ни рассмотрен, ни разрешен. Есть, однако, один частный случай, в котором необходимые предположения представляются устанавливаемыми очевидно, — это случай постоянного электростатического поля. Мы рассмотрим здесь этот случай, предполагая поле достаточно слабым для того, чтобы можно было использовать метод теории возмущений. Мы установим, что распределение, не создающее никакого поля, не удовлетворяет уравнениям движения. Отделяя это распределение от того, которое удовлетворяет уравнениям движения и отвечает состоянию, в котором нет ни электронов, ни позитронов, мы получим разность, которую можно физически истолковать как эффект поляризации электрическим полем нормального распределения отрицательно-энергетических электронов.

Воспользуемся приближенным методом Хартри—Фока, позволяющим приписать каждому электрону свою индивидуальную собственную волновую функцию $\psi(q)$, и введем матрицу плотности R , определив ее формулой

$$(q' | R | q'') = \sum_r \bar{\psi}_r(q') \psi_r(q''),$$

где суммирование распространяется на все электроны, т. е. на все занятые состояния. С той степенью точности, которая свойственна методу Хартри—Фока, всякое распределение электронов может быть характеризовано подобной матрицей. Это представление—не релятивистское, поскольку переменные q' , q'' , характеризующие элементы матрицы R , отвечают двум различным точкам пространства, но одному моменту времени. Тем не менее, оно подходит для рассматриваемой нами проблемы.

Уравнение движения для R имеет вид¹⁾

$$i\hbar \dot{R} = HR - RH, \quad (2)$$

где H —гамильтониан электрона, движущегося в поле:

$$H = c\rho_1(\sigma, \mathbf{p}) + \rho_3 mc^2 - eV,$$

ρ и σ —обычные спиновые матрицы и V —электростатический потенциал. Потенциал V должен содержать часть, обусловленную вкладом, вносимым в поле другими присутствующими электронами. Условием того, что распределение удовлетворяет принципу исключения, служит

$$R^2 = R. \quad (3)$$

Обозначим через R_0 распределение, которое, согласно гипотезе, не создает никакого поля. Наиболее естественная гипотеза для R_0 имеет вид

$$R_0 = \frac{1}{2} (1 - W / |W|), \quad (4)$$

где W —кинетическая энергия электрона:

$$W = c\rho_1(\sigma, \mathbf{p}) + \rho_3 mc^2.$$

Это означает, что в матричном представлении, в котором W диагонально, матрица R_0 также диагональна и имеет диагональные элементы 0 или 1 в зависимости от того, положительна или отрицательна энергия W . В (4) должна фигурировать именно кинетическая энергия W , а не полная

¹⁾ Dirac // Proc. Camb. Phil. Soc.—1929.—V. 25.—P. 62; 1930.—V. 26.—P. 376.

энергия H , потому что в последнем случае выражение (4) изменялось бы уже при добавлении произвольной константы к электрическому потенциалу V и не могло бы, следовательно, иметь никакого физического смысла.

Рассмотрим неизменное во времени состояние, для которого уравнение движения (2) сводится к

$$0 = HR - RH. \quad (5)$$

Это уравнение не удовлетворяется для $R = R_0$, если только V — не константа. Предположим, что V — малая величина первого порядка, и будем искать решение (3) и (5) в виде $R = R_0 + R_1$, где R_1 — величина первого порядка. В пренебрежении малыми величинами второго порядка уравнение (5) дает

$$0 = (W - eV)(R_0 + R_1) - (R_0 + R_1)(W - eV) = \\ = WR_1 - R_1W - e(VR_0 - R_0V). \quad (6)$$

Оператор W можно определить как положительный квадратный корень из $W^2 = m^2c^4 + c^2\mathbf{p}^2$. Поэтому

$$|W| = c(m^2c^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}.$$

Если положить

$$W/|W| = \gamma,$$

то

$$W = c\gamma(m^2c^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2},$$

а также

$$R_0 = 1/2(1 - \gamma).$$

Следовательно, уравнение (6) можно переписать в виде

$$\gamma(m^2c^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}R_1 - R_1\gamma(m^2c^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2} = \frac{1}{2}\frac{e}{c}(\gamma V - V\gamma). \quad (7)$$

Уравнение (3) дает

$$(R_0 + R_1)^2 = R_0 + R_1, \quad R_0R_1 + R_1R_0 = R_1,$$

что сводится к

$$\gamma R_1 + R_1\gamma = 0.$$

Используя это соотношение и уравнение $\gamma^2 = 1$, умножим обе части (7) слева на γ и получим

$$(m^2c^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}R_1 + R_1(m^2c^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2} = \frac{1}{2}\frac{e}{c}(V - \gamma V\gamma).$$

Интересующая нас величина — это плотность электрического заряда, отвечающая распределению R_1 . Чтобы

получить ее, необходимо сначала образовать сумму диагональных элементов R_1 по спиновым переменным, затем умножить ее на $-e$ и вычислить общий вид диагонального элемента результирующей матрицы в x -представлении. Если обозначить через D сумму диагональных элементов по спиновым переменным, то после простых вычислений получим

$$(m^2c^2 + p^2)^{1/2} D(R_1) + D(R_1) (m^2c^2 + p^2)^{1/2} = \frac{1}{2} \frac{e}{c} D(V - \gamma V \gamma) = \\ = 2 \frac{e}{c} \left\{ V - \frac{1}{(m^2c^2 + p^2)^{1/2}} [(p, Vp) + m^2c^2 V] \frac{1}{(m^2c^2 + p^2)^{1/2}} \right\}.$$

Если теперь допустить, что используется представление, в котором диагональна матрица импульса p , и обозначить через $(p' | D(R_1) | p'')$ общий элемент матрицы $D(R_1)$, то получится уравнение

$$(m^2c^2 + p'^2)^{1/2} (p' | D(R_1) | p'') + (p' | D(R_1) | p'') (m^2c^2 + p''^2)^{1/2} = \\ = 2 \frac{e}{c} (p' | V | p'') \left\{ 1 - \frac{1}{(m^2c^2 + p'^2)^{1/2}} [(p', p'') + m^2c^2] \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{(m^2c^2 + p''^2)^{1/2}} \right\},$$

которое дает

$$(p' | D(R_1) | p'') = \\ = 2 \frac{e}{c} (p' | V | p'') \frac{1 - \frac{(p', p'') + m^2c^2}{(m^2c^2 + p'^2)^{1/2} (m^2c^2 + p''^2)^{1/2}}}{(m^2c^2 + p'^2)^{1/2} + (m^2c^2 + p''^2)^{1/2}}. \quad (8)$$

Теперь можно преобразовать $D(R_1)$ в то представление, в котором диагональны переменные x , и вычислить диагональный элемент. Пользуясь обычными законами преобразования, получаем

$$(x | D(R_1) | x) = \frac{1}{h^3} \iint e^{-i(x, p' - p'')/h} (p' | D(R_1) | p'') dp' dp''. \quad (9)$$

Далее, поскольку V зависит только от пространственных переменных x и не зависит от импульса p , то $(p' | V | p'')$ зависит лишь от разности $p' - p''$. Поэтому, если подставить правую часть (8) под интеграл в (9) и принять за новые переменные интегрирования $p' + p''$ и $p' - p''$, то можно выполнить интегрирование по $p' + p''$ для любого V . Результат содержит логарифмическую бесконечность.

На первый взгляд можно было бы подумать, что наличие этой бесконечности делает теорию неприемлемой. Однако мы не можем предполагать, что теория будет

применяться, когда речь идет о самых высоких энергиях порядка $137 mc^2$, и наиболее разумный прием заключается, пожалуй, в том, чтобы произвольно ограничить область интегрирования по импульсной переменной $\frac{1}{2}(\mathbf{p}' + \mathbf{p}'')$ значением, отвечающим электронной энергии указанного порядка. Физически это сводится к допущению, что распределение электронов с отрицательными энергиями, меньшими примерно $137 mc^2$, ничего не вносит в поляризацию электрическим полем способом, предусматриваемым нашей теорией. Точное значение этого предельного энергетического уровня не играет большой роли, поскольку оно входит только в логарифм.

Если \mathbf{P} — абсолютная величина вектора импульса $\frac{1}{2}(\mathbf{p}' + \mathbf{p}'')$, на которой мы ограничиваем область интегрирования, то окончательный результат, полученный после взятия одного сложного интеграла, имеет вид

$$-e(x|D(R_1)|x) = -\frac{e^2}{\hbar c} \frac{2}{3\pi} \ln\left(\frac{2P}{mc} - \frac{5}{6}\right) \rho - \frac{4}{15\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \nabla^2 \rho, \quad (10)$$

где ρ — плотность электрического заряда, создающего потенциал V согласно уравнению

$$\nabla^2 V = -4\pi\rho,$$

и где отброшены члены, содержащие производные ρ выше второго порядка.

Второй член в правой части (10) дает плотность электрического заряда, обусловленную поляризацией, вызываемой действием поля на распределение электронов с отрицательной энергией. Важным членом является первый, который при $P/mc = 137$ в существенном составляет $-\frac{e^2}{\hbar c} \rho$, т. е. $-\frac{1}{137} \rho$. Это означает, что нет плотности, создаваемой поляризацией, кроме как в тех местах, где располагается создающая поле плотность ρ , и что плотность, индуцируемая там, нейтрализует примерно $1/137$ долю плотности, создающей поле. Второй член в (10) представляет поправку, существенную единственно только, когда ρ сильно зависит от места и претерпевает значительные изменения на расстояниях порядка \hbar/mc .

Как следствие проделанного расчета создается впечатление, что электрические заряды, обычно наблюдаемые на электронах, протонах или других заряженных частицах, не суть подлинные заряды, носимые этими частицами и входящие в фундаментальные уравнения, но что они

несколько меньше, приблизительно в отношении 136 к 137. Однако для процессов, допускающих обмен энергией порядка mc^2 , вероятно, не хватит времени для полного установления поляризации отрицательно-энергетических электронов, и поэтому следует ожидать, что наблюдаемые заряды будут ближе к реальным. В результате, когда дело касается энергий порядка mc^2 , могли бы возникать отклонения порядка 1 к 100 в таких выражениях, как формула Клейна—Нишины или формула рассеяния Резерфорда. Как только экспериментальная проверка этих формул станет достаточно точной, будет обретен способ контролировать точность наших гипотез, относящихся к полю, создаваемому распределением отрицательно-энергетических электронов.

14. ОБСУЖДЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ТЕОРИИ ПОЗИТРОНА ¹⁾

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,
vol. 30 (1934), pp. 150—163

DISCUSSION OF THE INFINITE DISTRIBUTION OF ELECTRONS IN THE THEORY OF THE POSITRON

By Professor P. A. M. Dirac, St. John's College

(Received 2 February, read 5 March 1934)

1. Использование матрицы плотности

Квантовая теория электрона допускает состояния с отрицательной кинетической энергией наряду с обычными состояниями с положительной кинетической энергией и допускает также переходы между состояниями разного типа. Частицы в состояниях с отрицательной кинетической энергией на практике никогда не наблюдались. Мы можем разрешить это противоречие между теорией и наблюдением, если предположим, что в мире, как мы его знаем, почти все состояния с отрицательной кинетической энергией заняты, причем в каждом из них в соответствии с принципом запрета Паули находится один электрон, и что распределение электронов с отрицательной энергией для нас ненаблюдаемо из-за его однородности. Любые незанятые состояния с отрицательной энергией были бы для нас наблюдаемы как дырки в распределении электронов с отрицательной энергией, но эти дырки проявляли бы себя как частицы с положительной кинетической энергией и потому — не как объекты, чуждые всему нашему опыту. Кажется разумной и соответствующей всем известным на сегодня фактам идея идентифицировать эти дырки с недавно открытыми позитронами и, таким образом, получить теорию позитрона ²⁾.

¹⁾ Перевод с английского В. П. Шелеста.

²⁾ Когда эта теория была впервые предложена (Proc. Roy. Soc. A.—1930.—V. 126.—P. 360; Proc. Camb. Phil. Soc.—1930.—V. 26.—P. 361), предполагалось, что дырки являются протонами, но впоследствии это предположение оказалось несостоятельным,

Итак, мы имеем картину мира, в котором существует бесконечное число электронов с отрицательной энергией (фактически бесконечное число в единице объема), значение которой непрерывно заполняет интервал от $-mc^2$ до $-\infty$. Мы должны рассмотреть способ, позволяющий трактовать эту бесконечность математически, и рассматривать физические эффекты, к которым она приводит. В частности, мы должны принять некоторые предположения о том, какое электромагнитное поле создается распределением электронов, причем эти предположения должны быть такими, чтобы любое конечное изменение в распределении давало бы изменение поля в соответствии с уравнениями Максвелла, но в то же время такими, чтобы бесконечное поле, которое согласно уравнениям Максвелла создается бесконечной плотностью электронов, было бы некоторым способом устроено.

Эти проблемы оказываются очень простыми, если предположить, что каждый электрон движется в пространстве, свободном от электромагнитного поля. Они становятся не столь простыми, когда присутствует поле, так как состояния с положительной и отрицательной энергией тогда так сильно перемешиваются, что, вообще говоря, невозможно релятивистски инвариантным способом провести строгое различие между ними. В этом случае необходимо тщательное рассмотрение даже такого элементарного вопроса, как вопрос о точном смысле, который можно придать такому распределению, какое встречается на практике, т. е. распределению, в котором почти все состояния с отрицательной энергией заняты и почти все состояния с положительной энергией свободны.

Точное рассмотрение задачи было бы слишком сложным, и в настоящей работе будет дано только приближенное рассмотрение в рамках метода самосогласованного поля Хартри. Мы предположим, что каждый электрон имеет свою собственную индивидуальную волновую функцию в пространстве-времени (вместо существования одной волновой функции от огромного числа переменных, описывающей все распределение), и предположим, кроме того, что каждый электрон движется в определенном электромагнитном поле, одном и том же для всех электронов. Это поле

так как было показано, что дырки должны соответствовать частицам с той же массой покоя, что и у электрона. (См. Proc. Roy. Soc. A.—1931.—V. 133.—P. 60.) (Статьи 7—9 в этом сборнике.—Примеч. ред.)

состоит из части, созданной внешними источниками, и части, созданной самим распределением электронов, причем определение точной зависимости этой последней части от распределения электронов является одной из задач, которые мы должны рассмотреть.

Обозначим нормированные функции для электронов в любой момент времени через $\psi_a(x)$, где x означает три пространственные координаты электрона x_1, x_2, x_3 и индекс a принимает различные значения для различных электронов. Если учитывать спин электрона, каждая функция $\psi_a(x)$ должна иметь четыре компоненты, которые можно обозначить через $\psi_{ak}(x)$, $k=1, 2, 3, 4$. Все распределение электронов может быть описано матрицей плотности ρ , определенной соотношением

$$(x' | \rho | x'')_{k'k''} = \sum_a \psi_{ak'}(x') \bar{\psi}_{ak''}(x''), \quad (1)$$

где сумма берется по всем электронам. Эта величина есть матрица по спиновым переменным k и по пространственным переменным x . Она является, конечно, эрмитовой матрицей. Ее свойства были изучены ранее¹⁾, и главные из них выражаются уравнением

$$\rho^2 = \rho, \quad (2)$$

которое отражает тот факт, что распределение электронов удовлетворяет принципу запрета и уравнением движения

$$i\hbar \frac{d\rho}{dt} = H\rho - \rho H. \quad (3)$$

Здесь H — гамильтониан движения одного электрона в поле,

$$H = \alpha_s (\rho_s + eA_s) - eA_0 + \alpha_4 m, \quad (4)$$

причем скорость света равна единице и предполагается суммирование по значениям $s=1, 2, 3$.

Другой способ рассмотрения суммы в правой части (1) — считать ее суммой по всем занятым состояниям²⁾. Ее удобно записать в виде $\sum_{\text{ос}} \psi_{k'}(x') \bar{\psi}_{k''}(x'')$. Будет существовать соответствующая сумма по незанятым состояниям, которая

¹⁾ Dirac // Proc. Camb. Phil. Soc.— 1925.— V. 25.— P. 62;— 1930.— V. 26.— P. 376; 1931.— V. 27.— P. 240.

²⁾ Слово «все», используемое в этом контексте, означает все состояния из системы ортогональных состояний, которая делается настолько возможно большой, но не включает состояния, образованные суперпозицией этих ортогональных состояний.

может быть записана как $\sum_{\text{un}} \psi_{k'}(x') \bar{\psi}_{k''}(x'')$. Если мы сложим две эти суммы, то получим сумму по всем состояниям, которая согласно теории преобразований в квантовой механике должна быть равна единичной матрице. Таким образом,

$$\sum_{\text{oc}} \psi_{k'}(x') \bar{\psi}_{k''}(x'') + \sum_{\text{un}} \psi_{k'}(x') \bar{\psi}_{k''}(x'') = \delta(x' - x'') \delta_{kk''}.$$

Положим

$$\rho = \frac{1}{2} (1 + \rho_1), \quad (5)$$

так что

$$(x' | \rho_1 | x'')_{k'k''} = \sum_{\text{oc}} \psi_{k'}(x') \bar{\psi}_{k''}(x'') - \sum_{\text{un}} \psi_{k'}(x') \bar{\psi}_{k''}(x'').$$

Теперь мы можем считать, что распределение электронов характеризуется матрицей ρ_1 вместо ρ . Это дает то преимущество, что симметрия между электронами и позитронами становится более наглядной, и приводит к более ясным математическим выражениям. Уравнение движения (3) остается неизменным при замене ρ через ρ_1 , а уравнение (2) превращается в

$$\rho_1^2 = 1. \quad (6)$$

Матрицы плотности, которые мы обсуждали до сих пор, являются нерелятивистскими; так как каждый их элемент относится к двум точкам пространства, x' и x'' , но к одному моменту времени. Чтобы получить релятивистскую теорию, мы должны ввести два времени, t' и t'' , и использовать вместо ρ релятивистскую матрицу плотности R , определенную соотношением

$$\begin{aligned} (x't' | R | x''t'') = \\ = \sum_a \psi_{ak'}(x't') \bar{\psi}_{ak''}(x''t'') = \sum_{\text{oc}} \psi_{k'}(x't') \bar{\psi}_{k''}(x''t''). \end{aligned} \quad (7)$$

Вместо ρ_1 мы будем теперь иметь R_1 :

$$(x't' | R_1 | x''t'') = \sum_{\text{oc}} \psi_{k'}(x't') \bar{\psi}_{k''}(x''t'') - \sum_{\text{un}} \psi_{k'}(x't') \bar{\psi}_{k''}(x''t''),$$

а вместо соотношения (5) будем иметь

$$R = \frac{1}{2} (R_F + R_1),$$

где

$$(x't' | R_F | x''t'') = \sum_{\text{oc}} \psi_{k'}(x't') \bar{\psi}_{k''}(x''t'') + \sum_{\text{un}} \psi_{k'}(x't') \bar{\psi}_{k''}(x''t'').$$

R_F , представляющая полное распределение, в котором заняты все возможные состояния, теперь не равна просто единичной матрице, но все равно мы должны ожидать, что она играет некоторую фундаментальную роль в теории.

Новые матрицы R , R_1 , R_F также эрмитовы и удовлетворяют уравнениям движения

$$\mathcal{H}R = 0, \quad \mathcal{H}R_1 = 0, \quad \mathcal{H}R_F = 0, \quad (8)$$

где \mathcal{H} — полный оператор, действующий на волновую функцию в волновом уравнении для одного электрона, т. е.

$$\mathcal{H} = W - H,$$

где W — оператор дифференцирования по времени, умноженный на $i\hbar$. Уравнения (2) и (6) не могут быть в компактном виде переписаны для матриц R .

Чтобы получить поле, созданное распределением электронов, мы должны сначала получить электрическую плотность и плотность тока. Для этого согласно обычной теории для конечных распределений необходимо взять диагональный элемент от ρ по пространственным переменным или диагональный элемент по пространственным и временной переменным от R и образовать из таких элементов диагональную сумму (след) по спиновым переменным. Полученное в результате выражение, т. е. $\sum_k (x | \rho | x)_{kk}$

или $\sum_k (xt | R | xt)_{kk}$, дает электрическую плотность с точностью до множителя — e ; s -компонента соответствующей плотности тока равна $\sum_k (x | \alpha_s \rho | x)_{kk}$ или $\sum_k (xt | \alpha_s R | xt)_{kk}$.

Можно легко проверить, что эти выражения для электрической плотности и тока удовлетворяют закону сохранения электричества. Возьмем в уравнении (3) диагональные элементы по пространственным переменным, но сохраним символическое матричное обозначение для спиновых переменных, так что запись типа $(x | \rho | x)$ означает матрицу с четырьмя строками и четырьмя колонками, т. е. матрицу такой же природы, что и α . Это дает

$$i\hbar \frac{d}{dt} (x | \rho | x) = (x | H\rho - \rho H | x) = \alpha_s (x | p_s \rho - \rho p_s | x) + \\ + (x | \{\alpha_s \rho - \rho \alpha_s\} \{p_s + eA_s\} | x) + (x | \alpha_4 \rho - \rho \alpha_4 | x) m.$$

Если теперь взять диагональную сумму по спиновым переменным, то два последних члена не дадут никакого вклада, так как диагональная сумма от произведения двух матриц

не зависит от порядка сомножителей, и у нас остается уравнение

$$i\hbar \frac{d}{dt} \sum_k (x | \rho | x)_{kk} = \sum_{kk'} \alpha_{skk'} (x | p_s \rho - \rho p_s | x)_{k'k} = \\ = -i\hbar \sum_{kk'} \alpha_{skk'} \frac{\partial}{\partial x_s} (x | \rho | x)_{k'k},$$

т. е.

$$\frac{d}{dt} \sum_k (x | \rho | x)_{kk} = -\frac{\partial}{\partial x_s} \sum_k (x | \alpha_s \rho | x)_{kk}, \quad (9)$$

которое и есть требуемый закон сохранения.

В нашей теории электрическая плотность и плотность тока, определяемые этими формулами, будут бесконечными, и поэтому необходимо несколько изменить предположения. Итак, возникает задача найти некоторый естественный способ устранения бесконечностей из $\sum_k (xt | R | xt)_{kk}$ и $\sum_k (xt | \alpha_s R | xt)_{kk}$ такой, чтобы оставшиеся конечные величины можно было считать электрической плотностью и плотностью тока. Эта задача требует проведения детального исследования сингулярностей в матричных элементах $(x' t' | R | x'' t'')_{k'k''}$ вблизи диагонали $x'_s = x''_s, t' = t''$.

2. Случай отсутствия поля

Мы начнем наше исследование со случая, когда электромагнитное поле отсутствует и гамильтониан (4) сводится к

$$H = \alpha_s p_s + \alpha_4 m. \quad (10)$$

В этом случае можно точно вычислить матричные элементы $(x'' t'' | R | x' t')_{k'k''}$ для распределения электронов, в котором все состояния с отрицательной энергией заняты, а все состояния с положительной энергией свободны, и точно увидеть, как эти матричные элементы ведут себя вблизи диагонали.

Если попытаться работать непосредственно с определенным (7), то мы встретимся с некоторыми громоздкими вычислениями при учете спиновых переменных и суммировании по двум возможным ориентациям спина. Эти вычисления можно обойти, используя символические методы и получив сначала ρ . Условие, что функция ψ содержит фурье-компоненты, принадлежащие только состояниям с отрицательной энергией, можно символически выразить

в виде

$$(H + \sqrt{P^2 + m^2}) \psi = 0,$$

где P означает длину вектора \mathbf{p} и берется положительное значение квадратного корня. Условие, что распределение ρ содержит электроны только в состояниях с отрицательной энергией, может быть выражено подобным же образом:

$$(H + \sqrt{P^2 + m^2}) \rho = 0. \quad (11)$$

Условие, что в распределении ρ каждое состояние с отрицательной энергией занято, равносильно условию, что распределение $1 - \rho$ содержит электроны только в состояниях с положительной энергией и поэтому может быть выражено уравнением

$$(H - \sqrt{P^2 + m^2}) (1 - \rho) = 0.$$

Складывая это уравнение с уравнением (11), получим

$$H - \sqrt{P^2 + m^2} + \sqrt{P^2 + m^2} 2\rho = 0,$$

или

$$\rho = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{H}{\sqrt{P^2 + m^2}} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{p}) + \alpha_4 m}{\sqrt{P^2 + m^2}} \right). \quad (12)$$

Поэтому из теории преобразований получаем

$$\begin{aligned} \langle x' | \rho | x'' \rangle &= \frac{1}{2\hbar^3} \iint e^{i(\mathbf{x}', \mathbf{p}')/\hbar} dp' \times \\ &\times \left(1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{p}') + \alpha_4 m}{\sqrt{P'^2 + m^2}} \delta(p' - p'') dp'' e^{-i(\mathbf{x}', \mathbf{p}'')/\hbar}, \end{aligned} \quad (13)$$

где dp означает произведение $dp_1 dp_2 dp_3$.

Далее, легко убедиться, что

$$\begin{aligned} \langle x' t' | R | x'' t'' \rangle &= \frac{1}{2\hbar^3} \iint e^{i(\mathbf{x}', \mathbf{p}')/\hbar} e^{it' V \sqrt{P'^2 + m^2}/\hbar} dp' \times \\ &\times \left(1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{p}') + \alpha_4 m}{\sqrt{P'^2 + m^2}} \right) \delta(p' - p'') dp'' e^{-i(\mathbf{x}'', \mathbf{p}'')/\hbar} e^{-it'' V \sqrt{P''^2 + m^2}/\hbar}. \end{aligned} \quad (14)$$

Это следует из того, что выражение в правой части (14) эрмитово и переходит в (13) при $t' = t''$ и, кроме того, удовлетворяет уравнению движения (8), так как действие оператора \mathcal{H} на подынтегральное выражение в (14) эквивалентно умножению его слева на оператор

$$- \left\{ (\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{p}') + \alpha_4 m + \sqrt{P'^2 + m^2} \right\},$$

что согласно уравнению (11) дает нуль.

Введем обозначение

$$x'_s - x''_s = x_s, \quad t' - t'' = t,$$

которое мы будем использовать далее до конца работы, и из (14) получим

$$\begin{aligned} (x' t' | R | x'' t'') &= \\ &= \frac{1}{2h_3} \int e^{i(x, p)/\hbar} e^{it V \overline{p^2 + m^2}/\hbar} \left(1 - \frac{(\alpha, p) + \alpha_4 m}{V \overline{p^2 + m^2}} \right) dp = \\ &= - \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - i\hbar \alpha_s \frac{\partial}{\partial x_s} + \alpha_4 m \right] S(x, t), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$S(x, t) = \frac{1}{2h^3} \int e^{i(x, p)/\hbar} e^{it V \overline{p^2 + m^2}/\hbar} \frac{dp}{V \overline{p^2 + m^2}}.$$

Чтобы проинтегрировать это выражение для S , введем длину r вектора x и угол ϑ между векторами x и p . Тогда

$$\begin{aligned} S(x, t) &= \frac{\pi}{x^3} \int_0^\infty \frac{P^2 dP}{V \overline{P^2 + m^2}} \int_{-\pi}^\pi \sin \vartheta d\vartheta e^{ir P \cos \vartheta/\hbar} e^{it V \overline{P^2 + m^2}/\hbar} = \\ &= \frac{-i}{2hr^2} \int_0^\infty \left\{ e^{i(rP + t V \overline{P^2 + m^2})/\hbar} - e^{i(-rP + t V \overline{P^2 + m^2})/\hbar} \right\} \frac{P dP}{V \overline{P^2 + m^2}} = \\ &= \frac{-i}{2hr^2} \int_{-\infty}^\infty e^{i(rP + t V \overline{P^2 + m^2})/\hbar} \frac{P dP}{V \overline{P^2 + m^2}} = \frac{-i}{4h} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} U(r, t), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} U(r, t) &= -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{i(rP + t V \overline{P^2 + m^2})/\hbar} \frac{dP}{V \overline{P^2 + m^2}} = \\ &= -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \exp \left\{ \frac{im}{\hbar} [r \operatorname{sh} \chi + t \operatorname{ch} \chi] \right\} d\chi, \\ P &= m \operatorname{sh} \chi, \quad V \overline{P^2 + m^2} = m \operatorname{ch} \chi. \end{aligned}$$

Этот интеграл выражается через функции Бесселя, и результат равен

$$U(r, t) = \begin{cases} H_0^{(1)} \left(\frac{m}{\hbar} (t^2 - r^2)^{1/2} \right), & t > r, \\ H_0^{(1)} \left(\frac{im}{\hbar} (r^2 - t^2)^{1/2} \right), & r > t > -r, \\ -H_0^{(2)} \left(\frac{m}{\hbar} (t^2 - r^2)^{1/2} \right), & -r > t. \end{cases}$$

Если провести соответствующий расчет для распределения электронов, в котором все состояния с отрицательной энергией свободны, а все состояния с положительной энергией заняты, то мы придем к результату в форме (15), где S будет определяться выражением (16) с заменой $U(r, t)$ на $-U(r, -t)$. Поэтому полное распределение R_F , в котором все состояния с положительной и отрицательной энергией заняты, будет определяться выражениями

$$(x't' | R_F | x''t'') = - \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - i\hbar \alpha_s \frac{\partial}{\partial x_s} + \alpha_4 m \right] S_F(x, t), \quad (17)$$

$$S_F(x, t) = \frac{-i}{4\hbar} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} U_F(r, t), \quad (18)$$

где

$$U_F(r, t) = U(r, t) - U(r, -t) = \begin{cases} 2J_0 \left(\frac{m}{\hbar} (t^2 - r^2)^{1/2} \right), & t > r, \\ 0, & r > t > -r, \\ -2J_0 \left(\frac{m}{\hbar} (t^2 - r^2)^{1/2} \right), & -r > t. \end{cases} \quad (19)$$

Аналогично выражается распределение R_1 :

$$(x't' | R_1 | x''t'') = - \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - i\hbar \alpha_s \frac{\partial}{\partial x_s} + \alpha_4 m \right] S_1(x, t), \quad (20)$$

$$S_1(x, t) = \frac{-i}{4\hbar} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} U_1(r, t), \quad (21)$$

где

$$U_1(r, t) = U(r, t) + U(r, -t) = \begin{cases} 2iY_0 \left(\frac{m}{\hbar} (t^2 - r^2)^{1/2} \right), & t > r, \\ 2H_0^{(1)} \left(\frac{im}{\hbar} (r^2 - t^2)^{1/2} \right), & r > t > -r, \\ 2iY_0 \left(\frac{m}{\hbar} (t^2 - r^2)^{1/2} \right), & -r > t. \end{cases} \quad (22)$$

Из этих выражений ясно, что сингулярности существуют не только в точке $x_s = 0, t = 0$, но на всем световом конусе $t^2 - r^2 = 0$. Чтобы определить эти сингулярности, можно разложить функции Бесселя в ряд по степеням $\sqrt{t^2 - r^2}$ и сохранить несколько первых членов. Если оставить только первый член в (19), то мы получим, что U_F есть константа, равная нулю вне светового конуса и равная $+2$ и -2 в двух областях внутри светового конуса,

в которых $t > r$ и $t < -r$ соответственно. Подстановка такой функции U_F в (18) дает

$$S_F(x, t) = \frac{i}{2hr} [\delta(r-t) - \delta(r+t)].$$

Для $t > 0$ это можно записать в виде

$$S_F(x, t) = \frac{i}{2hr} \delta(r-t) = \frac{i}{h} \delta(t^2 - r^2),$$

и, подставив в (17) и пренебрегая членом, включающим $\delta(t^2 - r^2)$, получим

$$(x't' | R_F | x''t'') = \frac{1}{\pi} (t + \alpha_s x_s) \delta'(t^2 - r^2). \quad (23)$$

Это самая сильная сингулярность R_F . Для $t < 0$ результат получается тот же, но с другим знаком. Если мы сохраним второй член в разложении J_0 в (19), то получим следующую, более слабую сингулярность R_F , содержащую $\delta(t^2 - r^2)$. Если оставить еще и третий член в J_0 в (19), то получим в R_F сингулярность третьего вида, содержащую скачок на световом конусе. Члены четвертого и более высокого порядка в J_0 не приводят к возникновению сингулярностей в R_F .

Теперь рассмотрим сингулярности в R_1 . Главные члены в U_1 , определяемые выражением (22), равны

$$\begin{aligned} & \frac{4i}{\pi} \ln \left(\frac{m}{h} (t^2 - r^2)^{1/2} \right) J_0 \left(\frac{m}{h} (t^2 - r^2)^{1/2} \right), \quad |t| > r, \quad (24) \\ & \left[2 + \frac{4i}{\pi} \ln \left(\frac{im}{h} (r^2 - t^2)^{1/2} \right) \right] J_0 \left(\frac{im}{h} (r^2 - t^2)^{1/2} \right), \quad |t| < r. \end{aligned} \quad (25)$$

Остальные члены определяются степенным рядом по $t^2 - r^2$ и имеют одинаковый вид внутри и вне светового конуса, поэтому они не дают никаких сингулярностей. Выражение (25) можно упростить, приведя его к виду

$$\frac{4i}{\pi} \ln \left(\frac{m}{h} (r^2 - t^2)^{1/2} \right) J_0 \left(\frac{im}{h} (r^2 - t^2)^{1/2} \right).$$

Подставляя это выражение и выражение (24) в (21), мы получим, если учесть только первый член разложения,

$$S_1(x, t) = \frac{1}{\pi h} \frac{1}{r^2 - t^2}. \quad (26)$$

Важно отметить, что никаких δ -функций не появляется в $S_1(x, t)$. Причина этого, по существу, заключается в том,

что при дифференцировании логарифма, входящего в функции Бесселя Y_0 и $H_0^{(1)}$, нужно использовать формулу

$$\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z} - i\pi \delta(z), \quad (27)$$

в которой член $-i\pi \delta(z)$ требуется для того, чтобы сделать интеграл от правой части (27) в пределах от a до $-a$ равным $\ln(-1)$, поскольку интеграл от $1/z$ в этих пределах предполагается равным нулю. Возникающая при этом δ -функция сокращается с той δ -функцией, которая возникает из-за того, что при $r > t > -r$ мы имеем $H_0^{(1)}$ вместо Y_0 в (22). Это сокращение является точным и сохраняется при повторных дифференцированиях выражения (22) по любой из переменных t, r, x_s .

Подставляя (26) в (20) и пренебрегая членом $1/(t^2 - r^2)$, получим

$$(x't' | R_1 | x''t'') = \frac{-i}{\pi^2} \frac{t + \alpha_s x_s}{(t^2 - r^2)^2}. \quad (28)$$

Это выражение определяет самую сильную сингулярность R_1 . Учитывая второй и третий члены в разложении J_0 в (24) и (25), можно вычислить и другие сингулярности R_1 , включающие члены $1/(t^2 - r^2)$ и $\ln|t^2 - r^2|$.

Основной результат этого рассмотрения для случая отсутствия поля заключается в том, что существует два совершенно различных вида сингулярностей, появляющихся в матрицах R_F и R_1 соответственно. Все сингулярности в R_F связаны с δ -функцией, а сингулярности в R_1 — со степенной функцией и логарифмом. Благодаря общности этого результата можно ожидать, что он справедлив и при наличии поля.

3. Случай произвольного поля

Теперь рассмотрим сингулярности матриц $(x't' | R_F | x''t'')$ и $(x't' | R_1 | x''t'')$, когда имеется произвольное поле. Наш метод заключается в предположении, что сингулярности имеют ту же форму, что и в отсутствие поля, но с неизвестными коэффициентами. Эти коэффициенты должны быть функциями x'_s, t', x''_s, t'' , свободными от сингулярностей, и могут быть разложены в ряд Тейлора при малых значениях x_s и t . Нам нужно попытаться подобрать их так, чтобы удовлетворить уравнениям движения (8).

Метод может применяться независимо для R_F и R_1 , и поэтому мы подробно рассмотрим только матрицу плот-

ности R_1 , которой мы главным образом интересуемся. Положим

$$(x't' | R_1 | x''t'') = u \frac{t + \alpha_s x_s}{(t^2 - r^2)^2} + \frac{v}{t^2 - r^2} + w \ln |t^2 - r^2|, \quad (29)$$

где u , v и w суть функции от x'_s , x''_s , t' , t'' или от x_s , t , x''_s , t'' , не имеющие сингулярностей при малых значениях x_s и t . Чтобы сохранить достаточную общность, мы должны считать u , v и w матрицами по спиновым переменным, не обязательно коммутирующими с матрицами α . Однако мы покажем, что можно удовлетворить всем условиям с матрицей u , диагональной по спиновым переменным и поэтому коммутирующей со всеми α . Для сокращения алгебраических выкладок мы уже сейчас предположим, что u диагональна по спиновым переменным.

Теперь нам нужно попытаться подобрать u , v и w так, чтобы второе из уравнений (8) удовлетворялось. Удобно использовать символ \mathcal{H} для обозначения дифференциального оператора

$$\mathcal{H} = i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_s \frac{\partial}{\partial x_s} \right) + e(A_0 - \alpha_s A_s) - \alpha_4 m, \quad (30)$$

причем будем считать, что функция, на которую он действует, зависит от переменных x_s , t , x''_s , t'' и не включает явной зависимости от x'_s , t' . Используя это обозначение, мы получаем из (8)

$$\mathcal{H} \left\{ u \frac{t + \alpha_s x_s}{(t^2 - r^2)^2} + \frac{v}{t^2 - r^2} + w \ln |t^2 - r^2| \right\} = 0,$$

что сводится к

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}u) \frac{t + \alpha_s x_s}{(t^2 - r^2)^2} + (\mathcal{H}v) \frac{1}{t^2 - r^2} - 2i\hbar \frac{t - \alpha_s x_s}{(t^2 - r^2)^2} v + \\ + (\mathcal{H}w) \ln |t^2 - r^2| + 2i\hbar \frac{t - \alpha_s x_s}{t^2 - r^2} w = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Чтобы это уравнение могло удовлетворяться при условии, что u , v , w не имеют сингулярностей, член, содержащий логарифм, должен быть равен нулю. Поэтому

$$\mathcal{H}w = 0 \quad (32)$$

и

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}u) (t + \alpha_s x_s) + (\mathcal{H}v) (t^2 - r^2) - 2i\hbar (t - \alpha_s x_s) v + \\ + 2i\hbar (t - \alpha_s x_s) w (t^2 - r^2). \end{aligned} \quad (33)$$

Далее, из соотношений коммутации для α после простого вычисления получаем

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}u)(t + \alpha_s x_s) = \\ = -(t - \alpha_s x_s) \mathcal{G}u + 2 \left\{ t \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + eA_0 \right) + x_s \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x_s} - eA_s \right) \right\} u, \end{aligned} \quad (34)$$

где \mathcal{G} означает дифференциальный оператор:

$$\mathcal{G} = i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha_s \frac{\partial}{\partial x_s} \right) + e(A_0 + \alpha_s A_s) + \alpha_s m. \quad (35)$$

Если мы подставим правую часть равенства (34) вместо первого члена уравнения (33), то получим уравнение, которое может быть записано в виде

$$2 \left\{ t \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + eA_0 \right) + x_s \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x_s} - eA_s \right) \right\} + (t - \alpha_s x_s) B = 0, \quad (36)$$

где

$$B = (t + \alpha_s x_s) \mathcal{H}v - 2i\hbar v + 2i\hbar \omega (t^2 - r^2) - \mathcal{G}u. \quad (37)$$

Выражение для $(x' t' | R_1 | x'' t'')$ в форме (29) не вполне определяет u и v , так как всегда можно добавить член вида $b(t - \alpha_s x_s)$ к функции u и вычесть b из v , не изменяя при этом выражения (29), причем b не будет содержать никаких сингулярностей. Легко показать, что можно выбрать b так, чтобы выполнялось условие $B = 0$. При выполнении этого условия уравнение (36) можно решить, и решение таково

$$u = k \exp \left\{ ie \int (A_0 dt - A_s dx_s) / \hbar \right\}, \quad (38)$$

где k — произвольный множитель и интеграл берется по прямой в пространстве-времени, соединяющей точку x''_s, t'' с точкой x'_s, t' . Мы должны взять $k = -i/\pi^2$, чтобы сделать самую сильную сингулярность в правой части выражения (29) равной правой части выражения (28) при малых значениях x_s, t . Это полностью определяет функцию u .

Далее рассмотрим уравнение (37) с $B = 0$. Его можно записать в виде

$$(t + \alpha_s x_s) f - 2i\hbar v - \mathcal{G}u = 0, \quad (39)$$

где

$$f = \mathcal{H}v + 2i\hbar (t - \alpha_s x_s) \omega. \quad (40)$$

Уравнение (39) выражает v через f , позволяет нам исключить v и работать дальше с функцией f . Исключив v

из (40), мы получаем

$$2i\hbar f = \mathcal{H}(t + \alpha_s x_s) f - \mathcal{H}\mathcal{U} - 4\hbar^2 (t - \alpha_s x_s) \omega. \quad (41)$$

Далее, при помощи такого же рода вычислений, которые привели к (34), находим

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t + \alpha_s x_s) f = & -(t - \alpha_s x_s) \mathcal{G}f + 4i\hbar f + \\ & + 2 \left\{ t \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + eA_0 \right) + x_s \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x_s} - eA_s \right) \right\} f. \end{aligned} \quad (42)$$

Если это выражение подставить на место первого члена в правой части (41), то мы придем к результату

$$\begin{aligned} 2 \left\{ t \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + eA_0 \right) + x_s \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x_s} - eA_s \right) \right\} f + 2i\hbar f = \\ = \mathcal{H}\mathcal{U} + (t - \alpha_s x_s) (4\hbar^2 \omega + \mathcal{G}f). \end{aligned} \quad (43)$$

Способ решения этого уравнения для f состоит в том, что сначала решается соответствующее уравнение, в котором опущен член, содержащий множитель $t - \alpha_s x_s$, т. е. уравнение

$$2 \left\{ t \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + eA_0 \right) + x_s \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x_s} - eA_s \right) \right\} f_1 + 2i\hbar f_1 = \mathcal{H}\mathcal{U}. \quad (44)$$

Тогда f будет иметь вид

$$f = f_1 + (t - \alpha_s x_s) g, \quad (45)$$

где g не имеет сингулярностей. Подставляя (45) в (43) и используя (44), получаем после сокращения множителя $t - \alpha_s x_s$ уравнение для g :

$$\begin{aligned} 2 \left\{ t \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + eA_0 \right) + x_s \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x_s} - eA_s \right) \right\} g + 4i\hbar g = \\ = 4\hbar^2 \omega + \mathcal{G}f_1 + \mathcal{G}(t - \alpha_s x_s) g. \end{aligned}$$

Если теперь использовать уравнение, подобное уравнению (42), с g вместо f и измененными знаками перед α_s , то последнее уравнение сведется к следующему:

$$(t + \alpha_s x_s) \mathcal{H}g = 4\hbar^2 \omega + \mathcal{G}f_1. \quad (46)$$

Уравнение (44) определяет f_1 полностью, без всякой произвольной константы. В этом можно убедиться, подставив в это уравнение вместо функций их разложения в ряд Тейлора по степеням x_s и t . Тогда коэффициенты разложения f_1 при n -й степени будут однозначно определяться коэффициентами разложения потенциала A при n -й и более низких степенях.

Итак, нам осталось решить уравнения (32) и (46) для ω и g .

Если подействовать оператором \mathcal{H} на уравнение (46), член, содержащий ω , исключается в силу (32) и остается уравнение

$$\mathcal{H}(t + \alpha_s x_s) \mathcal{H}g = \mathcal{H}^2 f_1. \quad (47)$$

Если его рассматривать как уравнение относительно неизвестного $\mathcal{H}g$, то можно убедиться с помощью разложения Тейлора, что $\mathcal{H}g$ определяется однозначно. Теперь из уравнения (46) определяется ω . Таким образом, мы удовлетворили всем уравнениям и определили все неизвестные за исключением g , которое само не определяется, но определяется $\mathcal{H}g$. Окончательный результат таков:

$$\begin{aligned} (x't' | R_1 | x''t'') = \\ = u \frac{t + \alpha_s x_s}{(t^2 - r^2)^2} + \frac{(t + \alpha_s x_s) f_1 - \mathcal{H}u}{2i\hbar (t^2 - r^2)} + \frac{g}{2i\hbar} + \omega \ln |t^2 - r^2|, \end{aligned} \quad (48)$$

где u дается формулой (38), а f_1 , $\mathcal{H}g$ и ω определяются уравнениями (44), (47) и (46) соответственно.

Чтобы проделать соответствующую работу для R_F , мы положим аналогично (29)

$$\begin{aligned} (x't' | R_F | x''t'') = u(t + \alpha_s x_s) \delta'(t^2 - r^2) + \\ + v \delta(t^2 - r^2) + \omega \gamma(t^2 - r^2), \end{aligned} \quad (49)$$

где γ — ступенчатая функция:

$$\gamma(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1, & z > 0. \end{cases}$$

Снова попытаемся найти u , v и ω , удовлетворяющие уравнению движения (8). Уравнения, которые мы получим для u , v и ω , будут точно такими же, как уже рассмотренные, и поэтому их решение будет точно таким же, как предыдущее, или будет отличаться от него числовым множителем. Чтобы самая сильная сингулярность в правой части (49), т. е. первый член, совпадала с правой частью соотношения (23) при малых x_s , t , мы должны взять этот числовой множитель равным $i\pi$. Поэтому выражение (49) с функциями u , v и ω из (29), умноженными на $i\pi$, будет давать матричные элементы $(x't' | R_F | x''t'')$ при $t > 0$. Матричные элементы с $t < 0$ определяются выражением (49) с u , v и ω из (29), умноженными на $-i\pi$.

Неопределенность, имеющаяся в g , не приводит ни к какой неопределенности в $(x't' | R_F | x''t'')$, так как изме-

нение g вызывает изменение v за счет члена, содержащего множитель $t^2 - r^2$, а такой член при умножении на $\delta(t^2 - r^2)$ обращается в нуль. Таким образом, R_F определено однозначно.

4. Заключение

Из приведенных выкладок мы видим, что следующие результаты должны быть справедливы, по крайней мере, в приближении метода Хартри.

(i) Можно придать точный смысл распределению электронов, в котором каждое состояние занято. Такое распределение может быть определено как распределение, описываемое матрицей плотности R_F , заданной выражением (49), причем эта матрица плотности полностью определена для любого заданного поля.

(ii) Можно придать точный смысл распределению электронов, в котором почти все (т. е. все за исключением конечного числа или все за исключением конечного числа в единице объема) состояния с отрицательной энергией заняты, а почти все состояния с положительной энергией свободны. Такое распределение можно определить как распределение, описываемое матрицей плотности $R = 1/2 (R_F + R_1)$, где R_1 имеет вид (48). Такое определение допустимо, потому что единственно возможные вариации в R_1 , а именно вариации, обусловленные тем, что g определяется неоднозначно, не содержат сингулярностей, а следовательно, соответствуют конечным или конечным на единицу объема изменениям в распределении плотности электронов. Наш метод не придает никакого точного смысла тем распределениям, в которых состояния с отрицательной энергией свободны или состояния с положительной энергией заняты. Однако для определенности теории достаточно в качестве ее основы принять предположение, что только распределения, описываемые матрицей плотности $R = 1/2 (R_F + R_1)$ с R_1 вида (48), имеют место в природе.

(iii) Распределение R , которое может, согласно приведенному выше предположению, иметь место в природе, естественно разделить на две части:

$$R = R_a + R_b,$$

где R_a содержит все сингулярности и, кроме того, однозначно определяется для любого заданного поля, так что любое изменение, которое может быть сделано в распределении электронов и позитронов, будет соответствовать

изменению R_b , но не R_a . Мы получим такое деление на две части, отнеся член, содержащий g , к R_b , а все остальные — к R_a . Таким образом,

$$R_b = g/4i\hbar.$$

Легко видеть, что R_b является релятивистски инвариантной и калибровочно инвариантной величиной, и легко убедиться после некоторых вычислений, что матрица R_b эрмитова и что электрическая плотность и плотность тока, соответствующие R_b , удовлетворяют закону сохранения (9). Поэтому кажется разумным сделать предположение, что электрическая плотность и плотность тока, соответствующие R_b , и являются теми плотностями, которые наблюдаются физически и создаются распределением электронов и позитронов. Таким образом, мы можем избавиться от бесконечностей, указанных в конце § 1.

Настоящая работа является незаконченной, поскольку в ней не было исследовано влияние на R_b принципа запрета, выраженного уравнением (2) или (6). Кроме того, требуется дальнейшая работа, цель которой — проверить физические следствия высказанного выше предположения и посмотреть, приводит ли оно к каким-либо явлениям в области поляризации вакуума электромагнитного поля.

15. ОТНОШЕНИЕ МЕЖДУ МАТЕМАТИКОЙ И ФИЗИКОЙ¹⁾

Proceedings of the Royal Society, Edinburgh
A vol. 59 (1938—39), pp. 122—129

THE RELATION BETWEEN MATHEMATICS AND PHYSICS

By Professor P. A. M. DIRAC, F. R. S.

Communicated to the Royal Society of Edinburgh on presentation of the James Scott Prize, February 6, 1939²⁾

(Ms. received February 25, 1939)

Физик в своем изучении явлений природы обладает двумя методами продвижения вперед: (1) методом эксперимента и наблюдений и (2) методом математического рассуждения. Первый представляет собою просто собираные нужных данных; второй позволяет выводить результаты экспериментов, которые еще не были проделаны. Нет никакой логической причины для того, чтобы второй метод был вообще возможен, но мы обнаруживаем на практике, что он действует и приводит к замечательным успехам. Это следует приписать некоторому *математическому качеству в Природе*, качеству, которого случайный наблюдатель и не заподозрит, но которое тем не менее играет важнейшую роль в том, как Природа устроена.

Можно описать это математическое качество в Природе, утверждая, что Вселенная так устроена, что математика оказывается полезным инструментом ее исследования. Однако недавнее развитие физической науки показывает, что это слишком примитивное понимание вопроса. Связь между математикой и описанием Вселенной гораздо глубже, чем эта простая идея, и мы можем получить представление о ней только после тщательного исследования разных факторов, из которых эта связь складывается. Главная задача моего сообщения и состоит в том, чтобы дать вам такое представление. Я собираюсь показать, как взгляды физиков на этот предмет постепенно

¹⁾ Перевод с английского М. К. Поливанова.

²⁾ Выпущено отдельным изданием 20 мая 1939 г.— *Примеч. ред.*

менялись под влиянием последовательности недавних открытий в физике, а затем я хочу немного порассуждать о будущем.

Возьмем в качестве отправной точки ту схему физической науки, которая была повсеместно признана в прошлом столетии, — механическую схему. Она рассматривает всю Вселенную как динамическую систему (разумеется, невероятно сложную динамическую систему), подчиненную законам движения в основном ньютонова типа. Роль математики в такой схеме состоит в том, чтобы представить законы движения уравнениями и получить решения этих уравнений, относящиеся к наблюдаемым условиям.

Руководящая идея этих применений математики к физике состоит в том, что уравнения, представляющие законы движения, *должны быть просты*. Весь успех этой схемы основан на том, что простые уравнения, кажется, работают. Физик получает таким образом в руки *принцип простоты*, которым можно пользоваться как инструментом в исследовании. Если он получает из каких-то грубых экспериментов данные, которые находятся в грубом согласии с некоторыми простыми уравнениями, он делает вывод, что если он проведет более аккуратный эксперимент, то данные будут находиться в лучшем согласии с уравнениями. Однако такой метод очень ограничен, потому что принцип простоты применим к фундаментальным законам движения, а не к явлениям Природы в общем случае. Так, например, грубый эксперимент, устанавливающий связь между давлением и объемом газа при определенной температуре, дает результаты, находящиеся в согласии с законом обратной пропорциональности. Но было бы неверно делать из этого вывод, что более тщательный эксперимент подтвердит этот закон с большей точностью: так как мы имеем здесь дело с явлением, не связанным сколько-либо прямым образом с фундаментальными законами движения.

Открытие теории относительности сделало необходимой модификацию принципа простоты. Один из, по-видимому, фундаментальных законов природы — это закон тяготения, который согласно Ньютону описывается очень простым уравнением; однако согласно Эйнштейну требуется развитие чрезвычайно сложной техники, прежде чем уравнения закона тяготения можно будет хотя бы только записать. Правда, с точки зрения высшей математики, можно привести аргументы в пользу того, что закон

гравитации Эйнштейна на самом деле проще закона Ньютона, но при этом придется приписать достаточно тонкий смысл самому понятию простоты, что в значительной мере разрушает практическое значение принципа простоты в качестве инструмента исследования оснований физики.

Что делает теорию относительности столь привлекательной для физиков, несмотря на то, что она противоречит принципу простоты,— это ее поразительная *математическая красота* («mathematical beauty»). Это качество поддается определению не более, чем красота в искусстве, однако обычно без труда понимается теми, кто изучает математику. Теория относительности подняла математическую красоту описания Природы на уровень, никогда прежде не достигавшийся. Частная теория изменила наши представления о пространстве и времени; эти изменения можно подытожить в утверждении, что группа преобразований, которым подчиняется пространственно-временной континуум, должна быть заменена: вместо группы Галилея мы должны рассматривать группу Лоренца. Последняя несравненно красивее, чем первая,— фактически, с математической точки зрения группа Галилея это вырожденный частный случай группы Лоренца. Общая теория относительности включает следующий шаг примерно такого же характера, хотя возрастание красоты на этот раз обычно считается меньшим, чем в случае специальной теории, вследствие чего в справедливость общей теории верят не так твердо, как в случае специальной теории.

Итак, мы видим, что должны заменить принцип простоты на *принцип математической красоты*. Исследователь, в своих усилиях выразить фундаментальные законы Природы в математической физике, должен бороться главным образом за математическую красоту. Надо по-прежнему принимать во внимание простоту, но она должна быть подчинена математической красоте. (Например, Эйнштейн, выбирая закон гравитации, взял простейший, совместимый с его пространственно-временным континуумом, и это привело его к успеху.) Часто случается, что требования простоты и красоты совпадают. Но если они сталкиваются, то следует отдавать предпочтение последним.

Перейдем ко второй революции в физической мысли нынешнего столетия— к квантовой физике. Это теория атомных явлений, основанная на механике существенно иного типа, нежели механика Ньютона. Различие можно

сформулировать кратко, но в довольно абстрактном виде, сказав, что динамические переменные в квантовой механике подчиняются алгебре, в которой аксиома коммутативности умножения не выполняется. Во всем остальном существует чрезвычайно близкая формальная аналогия между квантовой механикой и старой механикой. В самом деле, воистину примечательно, насколько старая механика оказывается приспособленной к обобщению на некоммутативную алгебру. Все элегантные черты старой механики могут быть перенесены в новую, где они появляются вновь с удвоенной красотой.

Квантовая механика требует введения в физическую теорию обширной новой области чистой математики — всей области, связанной с некоммутативным умножением. Эта математика, входя в физическую науку вслед за новой геометрией, введенной теорией относительности, намечает путь, который, как мы можем ожидать, будет продолжаться. Можно надеяться, что в будущем и другие обширные области чистой математики войдут в обиход в связи с развитием фундаментальной физики.

Чистая математика и физика становятся связанными все теснее, хотя их методы и остаются различными. Можно сказать, что математик играет в игру, в которой он сам изобретает правила, в то время как физик играет в игру, правила которой предлагает Природа, однако с течением времени становится все более очевидным, что правила, которые математик находит интересными, совпадают с теми, которые избрала Природа. Трудно предсказать, каков будет результат всего этого. Возможно, оба предмета в конце концов сольются, и каждая область чистой математики будет иметь физические приложения, причем их важность в физике станет пропорциональна их интересности в математике. В настоящее время мы, конечно, еще очень далеки от этой стадии, даже по отношению к некоторым самым элементарным вопросам. Например, в физике важно лишь четырехмерное пространство, в то время как для математики пространства с иным числом измерений представляют, в сущности, равный интерес. Однако вполне может случиться, что это расхождение вызвано неполнотой сегодняшних знаний и дальнейшее развитие покажет, что четырехмерное пространство представляет с точки зрения математики гораздо больший интерес, чем все другие.

Движение математики и физики в сторону объединения снабжает физика новым мощным методом исследова-

ния основ его науки, методом, который пока не удавалось применять с успехом, но который, я чувствую это, еще докажет свое значение в будущем. Метод состоит в том, чтобы начать с выбора такой ветви математики, которая, по вашей мысли, может стать основанием новой теории. В этом выборе надо руководствоваться в сильной степени соображениями математической красоты. Вероятно также, хорошо бы отдать предпочтение такой ветви математики, которая имеет в своем основании интересную группу преобразований, потому что преобразования играют важную роль в современной физической теории; как релятивистская теория, так и квантовая, по-видимому, показывают, что значение преобразований более фундаментально, чем значение уравнений. Выбрав область математики, следует начать развивать ее в подходящих направлениях, присматриваясь одновременно к тому, как она может поддаться естественной физической интерпретации.

Таким методом воспользовался Иордан в попытке получить улучшенную квантовую механику, опираясь на алгебру с неассоциативным умножением. Попытка не была успешной, как в общем-то и следовало ожидать, если обратить внимание, что неассоциативная алгебра не принадлежит к числу красивых математических теорий и не связана ни с какой интересной теорией преобразований. Я бы предложил в качестве идеи, выглядящей более обнадёживающе для улучшения квантовой механики, взять за основу теорию функций комплексной переменной. Эта область математики исключительно красива, и группа преобразований, с которой она связана, именно, группа преобразований комплексной плоскости, это та же группа, что и группа Лоренца, управляющая пространством-временем специальной теории относительности. Мы приходим таким образом к подозрению, что есть какая-то глубокая связь между теорией функций комплексной переменной и пространством-временем специальной теории относительности; разработка этой связи станет трудной целью будущих исследований.

Обсудим теперь, насколько широко простирается математическое качество Природы. По представлениям механической схемы физики или ее релятивистской модификации для полного описания Вселенной необходима не только полная система уравнений движения, но также и полный набор начальных условий, причем лишь к первым применима математическая теория. Последние же рассматриваются как лежащие вне теоретического осмыс-

ления и могут быть определены только из наблюдений. Чрезвычайная сложность Вселенной приписывается чрезвычайной сложности начальных условий, что оставляет ее вне рамок математического обсуждения.

Я нахожу такое положение в высшей мере неудовлетворительным философски, так как это противоречит всем идеям *единства Природы*. В любом случае, если математическая теория применима лишь к части описания Вселенной, эта часть должна быть резко отделена от остального. Но, фактически, кажется, нет такого естественного места, где можно провести линию раздела. Являются ли такие вещи, как свойства элементарных частиц в физике, их массы, численные коэффициенты, входящие в закон сил, предмет математической теории? Согласно узко механистическому взгляду они должны рассматриваться как начальные условия и лежать вне математической теории. Однако поскольку все элементарные частицы принадлежат тому или другому из небольшого числа определенных типов и все члены одного типа в точности одинаковы, они должны в какой-то мере управляться математическим законом, и большинство физиков считает сейчас, что в весьма большой мере. Например, Эддингтон строил теорию, которая была призвана объяснить массы частиц. Но даже если мы предположим, что все свойства элементарных частиц определяются теорией, мы все еще не будем знать, где провести черту, потому что мы немедленно окажемся перед следующим вопросом: определяется ли относительное обилие разных химических элементов теорией? И так мы будем шаг за шагом переходить от атомных вопросов к вопросам астрономическим.

Это неудовлетворительное положение еще ухудшается, когда мы переходим к новой квантовой механике. Несмотря на близкую аналогию между квантовой механикой и старой механикой в отношении математического формализма, они решительно отличаются в смысле природы их физических выводов. В соответствии со старой механикой результат любого наблюдения полностью определен и может быть теоретически вычислен из данных начальных условий; в квантовой же механике обычно наличествует неопределенность в результате измерения, связанная с возможностью появления квантовых скачков, и самое большее, что может быть теоретически вычислено, эта вероятность любого возможного результата, который будет получен. Вопрос, какой частный результат

будет получен в каждом частном случае, лежит за пределами теории. Это не может быть приписано неполноте теории, но представляет существенную черту применения формализма такого рода, как используемый в квантовой теории.

Таким образом, в соответствии с квантовой механикой для полного описания Вселенной мы нуждаемся не только в законах движения и начальных условиях, но еще и в информации о квантовых скачках всякий раз, когда они происходят. Эта последняя информация должна быть включена, наряду с начальными условиями, в ту часть описания Вселенной, которая находится вне теории.

Такое возрастание нематематической части описания Вселенной порождает философские возражения против квантовой теории и является, по моему мнению, той внутренней причиной, из-за которой некоторые физики до сих пор затрудняются принять эту механику. Квантовая механика, однако, не должна быть отброшена, во-первых, потому, что она находится в чрезвычайно широком и детальном согласии с экспериментом, и, во-вторых, потому, что неопределенность, которую она вносит в результаты эксперимента, как раз такого рода, что она философски удовлетворительна, поскольку ее следует приписать неизбежной грубости средств наблюдения, которыми мы располагаем для экспериментов на очень малых расстояниях. Но это возражение тем не менее указывает, что основания физики все еще далеки от своей окончательной формы.

Мы перейдем теперь к третьему великому достижению физической науки нашего столетия — к новой космологии. Возможно, что в философском смысле оно окажется еще более революционным, чем относительность или квантовая теория, хотя сейчас еще вряд ли можно увидеть все его следствия. Исходной точкой является красное смещение, наблюдаемое в спектрах отдаленных небесных тел, указывающее, что они удаляются от нас со скоростями, пропорциональными их расстояниям¹⁾. Скорости

¹⁾ Наличие разлетания нельзя считать точно доказанным, так как можно постулировать и другие причины красного смещения. Но эти иные причины окажут одинаково резкое воздействие на космологическую теорию и одинаково потребуют введения параметра порядка $2 \cdot 10^9$ лет для их математического описания, так что они, вероятно, не изменяют основных моментов приводимой здесь аргументации.

(Уточнение шкалы расстояний привело к увеличению этой оценки до $2 \cdot 10^{10}$ лет.— *Примеч. ред.*)

наиболее удаленных тел настолько громадны, что совершенно очевидна величайшая важность этого факта, т. е. ясно, что мы имеем дело здесь не с временными или локальными условиями, но с чем-то фундаментальным для всей нашей картины Вселенной.

Если мы будем возвращаться назад в прошлое, то придем ко времени около $2 \cdot 10^9$ лет тому назад, когда вся материя Вселенной была сконцентрирована в очень малом объеме. Кажется, словно в это время произошло нечто вроде взрыва, обломки которого мы все еще видим разлетающимися вовне. Эта теория была разработана Леметром¹⁾, который считает, что Вселенная началась с одного очень тяжелого атома, который претерпел сильнейший радиоактивный распад и таким способом разбился на нынешнее собрание астрономических тел, испустив одновременно и космические лучи.

Такая космологическая картина приводит к предположению, что было начало времени, и что бессмысленно задаваться вопросом, что было до этого. Можно получить грубое представление о геометрической картине такого развития, если представить себе настоящее в виде поверхности сферы, движение в прошлое—как движение к центру сферы, а движение в будущее—как движение вовне. Тогда нет никакого предела для движения в направлении будущего, но существует очевидный предел для движения в прошлое, отвечающий тому, что мы достигнем центра сферы. Начало времени предоставляет естественную точку, от которой должно отсчитываться время любого события. Обычно это называют эпохой события. Так, настоящая эпоха—это $2 \cdot 10^9$ лет.

Теперь вернемся к вопросам динамики. Согласно новой космологии Вселенная должна была возникнуть каким-либо простым образом. Что же тогда происходит с начальными условиями, нужными для динамической теории? Попросту говоря, их вообще не может быть или они должны быть тривиальны. Мы попадаем в положение, совершенно несостоятельное с точки зрения старой динамики. Если Вселенная просто развивалась в движении, которое следовало из заданной схемы уравнений движения с тривиальными начальными условиями, то она никак

¹⁾ Это советский математик А. Фридман впервые в 1922 г. нашел нестационарное решение уравнений общей теории относительности, которые описывают расширяющуюся Вселенную. Леметр был вторым.— *Примеч. ред.*

не могла бы прийти к той сложной структуре, которую мы наблюдаем. Квантовая механика предлагает выход из этого затруднения. Она позволяет приписать всю сложность квантовым скачкам, которые лежат вне схемы уравнений движения. *Квантовые скачки образуют теперь ту непросчитываемую часть явлений природы, которая заменяет начальные условия старого механистического подхода.*

В связи с новой космологией сто́ит отметить еще одно обстоятельство. В начале времени сами законы Природы, вероятно, весьма отличались от их современного вида. Таким образом, мы должны рассматривать законы Природы как непрерывно изменяющиеся с изменением эпохи, а не как сохраняющиеся неизменными во всем пространстве-времени. Эта идея была впервые предложена Милном, который вывел ее из допущения, что Вселенная в данную эпоху, грубо говоря, всюду однородна и сферически симметрична. Я нахожу эти предположения не очень удовлетворительными, так как локальные отступления от однородности столь велики и имеют такое существенное значение для всего мира, в котором мы живем, что кажется неправдоподобным, чтобы за ними стоял принцип однородности. Далее, если уж мы считаем законы Природы зависящими от эпохи, мы должны были бы ожидать, что они зависели бы и от места в пространстве, чтобы сохранить красивую идею теории относительности о фундаментальном сходстве между пространством и временем. Это говорит против допущения Милна еще более решительно, чем простое отсутствие однородности в распределении материи.

Мы проследили основное направление развития отношения между математикой и физикой вплоть до настоящего времени и достигли той стадии, когда становится интересным предаться размышлению о будущем. Всегда существовала неудовлетворенность этим соотношением, а именно ограничением объема применимости математики к описанию физической Вселенной. Часть, в которой она неприменима, возросла с появлением квантовой механики и уменьшилась с появлением новой космологии, но она всегда оставалась.

Эта особенность в отношении между математикой и физикой настолько неудовлетворительна, что, я думаю, можно смело предсказать, что в будущем она должна исчезнуть несмотря на разительную перемену наших обычных представлений, к которой это приведет. Это бу-

дет означать существование такой схемы, в которой всё описание Вселенной имеет свое математическое выражение, и мы должны будем предположить, что лицо, обладающее полным знанием математики, сумеет вывести из нее не только астрономические данные, но также все исторические явления, имеющие место в мире, вплоть до самых тривиальных. Разумеется, фактическое выполнение таких выводов должно лежать за пределами человеческих возможностей, ибо жизнь, насколько мы ее знаем, была бы невозможна, если бы мы могли рассчитывать будущие события, однако методы выполнения таких расчетов должны быть хорошо определены. Эта схема не может подчиняться принципу простоты, так как она должна быть предельно сложной, но она может подчиняться принципу математической красоты.

Я хотел бы выдвинуть предложение, как эта схема могла бы быть реализована. Если мы выразим настоящую эпоху, $2 \cdot 10^9$ лет, в единицах времени, определенных через атомные константы, то получим число порядка 10^{39} , которое определяет настоящее в абсолютном смысле. Не может ли так случиться, что все настоящие события соответствуют свойствам этого большого числа и, даже более общо, что вся история Вселенной соответствует свойствам всей последовательности натуральных чисел? На первый взгляд кажется, что Вселенная чересчур сложна для того, чтобы такое соответствие могло иметь место. Но я думаю, что такое возражение не может выдвигаться, ибо число 10^{39} невероятно сложно именно потому, что оно столь огромно. У нас есть краткий способ его записи, но это не должно закрывать нам глаза на то, что оно должно иметь чрезвычайно сложные свойства.

Значит, есть возможность, что древняя мечта философов связать всю Природу со свойствами целых чисел будет когда-нибудь осуществлена. Чтобы сделать это, физика должна пройти долгий путь, устанавливая в деталях, как это соответствие должно выглядеть. Одно указание на этот путь развития кажется довольно очевидным, а именно, что изучение целых чисел в современной математике неразрывным образом связано с теорией функций комплексной переменной, которая, как мы уже видели, с большой вероятностью должна стать основой будущей физики. Разработка этой идеи приведет к связи между атомной физикой и космологией.

16. ТЕОРИЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЮСОВ ¹⁾

The Physical Review

Second series, vol. 74 (1948), pp. 817—830

THE THEORY OF MAGNETIC POLES

P. A. M. DIRAC, Institute for Advanced Study,
Princeton, New Jersey

(Received June 21, 1948)

Если предположить, что частица с единичным магнитным полюсом может существовать и что она взаимодействует с заряженными частицами, то законы квантовой механики ведут к тому требованию, что электрические заряды должны быть квантованы—все заряды должны быть целыми кратными единичного заряда e , связанного с силой полюса g формулой $eg = \frac{1}{2}\hbar c$. Поскольку известно, что электрические заряды квантованы, и этому пока не было предложено никаких объяснений помимо существования магнитных полюсов, то мы получаем важный довод в пользу того, чтобы принимать магнитные полюса всерьез. Тот факт, что они до сих пор не наблюдались, может быть отнесен за счет большой величины кванта полюса.

В 1931 г. я предлагал примитивную теорию, описывавшую движение полюса в поле заряженной частицы, движение которой задано, или же движение заряженной частицы в поле полюса, движение которого задано. Настоящая работа выдвигает общую теорию заряженных частиц и полюсов, взаимодействующих через посредство электромагнитного поля. Идея, которая делает это обобщение, состоит в том предположении, что каждый полюс—это конец ненаблюдаемой струны—линии, вдоль которой электромагнитные потенциалы сингулярны, и во введении динамических координат и импульсов для описания движения струны. Тогда вся теория получается применением стандартных методов. Есть нерешенные трудности, относящиеся ко взаимодействию точечного заряда

¹⁾ Перевод с английского В. П. Павлова.

или точечного полюса с полем, которое он сам порождает, — такие же, как появляются во всех динамических теориях взаимодействующих полей и частиц.

1. Введение

Полевые уравнения электродинамики симметричны в электрических и магнитных силах. Однако симметрия электричества и магнетизма разрушается тем фактом, что у частицы может оказаться отдельный электрический заряд, в то время как не было наблюждено случаев, когда у частицы оказался бы отдельный магнитный полюс. В настоящей работе будет развита теория, в которой у частицы может оказаться отдельный магнитный полюс и диссимметрия между электричеством и магнетизмом будет состоять лишь в том, что наименьший полюс, который может встретиться, будет много больше наименьшего заряда. Это будет иметь следствием огромную энергию, необходимую, чтобы создать частицу с отдельным полюсом, что может очень хорошо объяснить, почему такие частицы не наблюдались до настоящего времени¹⁾.

В экспериментальной физике уже есть ряд частиц, для которых пока не существует удовлетворительных теорий, поэтому удивительно, зачем понадобилось постулировать частицы совсем нового сорта, на существование которых нет никаких экспериментальных указаний, вводя тем самым дальнейшие осложнения в изучение элементарных частиц. Теория магнитных полюсов интересна тем, что она образует естественное обобщение обычной электродинамики и *приводит к квантованию электричества*. Последовательные уравнения квантовой механики для взаимодействия полюса силы g с электрическим зарядом e можно построить, только если

$$eg = \frac{1}{2}n\hbar c, \quad (1)$$

где n — целое. Поэтому одно только существование единственного полюса силы g потребовало бы, чтобы все электрические заряды были квантованы в единицах $\frac{1}{2}\hbar c/g$, и

¹⁾ Эренхафт (*Ehrenhaft F.* // *Phys. Rev.* — 1945. — V. 67. — P. 63, 201) получил некоторые экспериментальные результаты, которые он интерпретировал в терминах частиц с отдельными магнитными полюсами. Это не является подтверждением настоящей теории, поскольку Эренхафт не использовал высоких энергий, и теория не приводит к ожиданию появления отдельных полюсов в условиях опытов Эренхафта.

аналогично, существование единственного заряда потребовало бы, чтобы были квантованы все полюса. Квантование электричества—это одна из самых основных и поразительных особенностей атомной физики, и кажется, что для него нет никакого объяснения, кроме теории полюсов. Это дает некоторое основание надеяться, что такие полюса существуют.

Впервые я выдвинул идею о магнитных полюсах в 1931 г.¹⁾ Теория, которую я предложил тогда, была весьма незаконченной, ибо она содержала только уравнения движения магнитного полюса в поле заряженной частицы, движение которой задано, или уравнения движения заряженной частицы в поле магнитного полюса, движение которого задано. Предлагаемое теперь усовершенствование позволяет получить все уравнения движения для магнитных полюсов и заряженных частиц, взаимодействующих друг с другом через посредство электромагнитного поля в соответствии с квантовой механикой, и позволяет получить полную динамическую теорию, исключая обычные трудности с появлением расходящихся интегралов в решениях волнового уравнения, возникающих из-за обратного действия на частицу того поля, которое она сама создает; в предлагаемой теории эти трудности совершенно той же природы, что и в обычной электродинамике.

II. Классические уравнения движения

Мы все время будем работать с релятивистскими обозначениями, используя, чтобы указать точку в пространстве-времени, четыре координаты x_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) и принимая скорость света равной единице. Электромагнитное поле в какой-либо точке образует 6-вектор $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$. Нам понадобится использовать обозначение дуального $(F^\dagger)_{\mu\nu}$ к 6-вектору $F_{\mu\nu}$, определяемого

$$(F^\dagger)_{01} = F_{23}, \quad (F^\dagger)_{23} = -F_{01},$$

вместе с уравнениями, получаемыми отсюда циклической перестановкой 1, 2, 3. Заметим, что

$$(F^{\dagger\dagger})_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu} \quad (2)$$

¹⁾ Dirac P. A. M. // Proc. Roy. Soc. A.—1931.— V. 133.— P. 60. (Статья 9 этого сборника.—Примеч. ред.)

и что с другим 6-вектором $G_{\mu\nu}$:

$$(F^\dagger)_{\mu\nu} G^{\mu\nu} = F_{\mu\nu} (G^\dagger)^{\mu\nu}.$$

Обычные уравнения Максвелла — это

$$\partial F_{\mu\nu} / \partial x_\nu = -4\pi j_\mu, \quad (3)$$

где j_μ — вектор, образованный плотностью заряда и током, и

$$\partial (F^\dagger)_{\mu\nu} / \partial x_\nu = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) утверждает обращение в нуль дивергенции магнитного потока и должно быть модифицировано в теории, допускающей отдельные полюса. Плотность полюсов и ток полюсов образуют вектор k_μ — магнитный аналог j_μ , и (4) надо будет заменить уравнением

$$\partial (F^\dagger)_{\mu\nu} / \partial x_\nu = -4\pi k_\mu. \quad (4')$$

Мировая линия частицы может быть описана, если четыре координаты z_μ точки на ней задать как функции измеренного вдоль нее собственного времени

$$z_\mu = z_\mu(s).$$

Частица с точечным зарядом e порождает такой вклад в j_μ , который бесконечен на мировой линии и равен нулю во всех других местах. Мы можем выразить его с помощью δ -функции и получим тогда для вектора заряда-тока в произвольной точке x

$$j_\mu(x) = \sum_e e \int \frac{dz_\mu}{ds} \delta_4(x-z) ds, \quad (5)$$

где функция δ_4 определена как

$$\delta_4(x) = \delta(x_0) \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3),$$

а \sum_e означает сумму по всем заряженным частицам. Аналогично, если полюса g сосредоточены в точках, то

$$k_\mu(x) = \sum_g g \int \frac{dz_\mu}{ds} \delta_4(x-z) ds, \quad (6)$$

где \sum_g означает сумму по всем частицам с полюсами. Уравнения (3), (4'), (5) и (6) фиксируют поле, если движение частиц и падающее излучение известны.

Движение заряженной частицы задается уравнением Лоренца:

$$m \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} = e \frac{dz_\nu}{ds} F_{\mu\nu}(z).$$

Мы можем принять аналогичное уравнение и для движения полюса:

$$m \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} = g \frac{dz_\nu}{ds} (F^\dagger)_{\mu\nu}(z). \quad (7)$$

Появляющиеся здесь полевые величины $F_{\mu\nu}(z)$ должны быть взяты в точке z , где расположена частица, и поэтому бесконечно велики и сингулярны; таким образом эти уравнения в действительности не имеют никакого смысла. Чтобы обойти бесконечности, становится необходимым сделать в них небольшие изменения. Часто используемый прием состоит в том, чтобы отойти от модели точечного заряда, заменяя δ_4 -функцию в (5) приближающейся к ней сглаженной функцией; похожую процедуру можно было бы применить и к полюсам в (6). Этот метод, однако, приводит для частиц к дополнительной массе, которая не преобразуется в соответствии с требованиями теории относительности. Возможно, лучший метод состоит во введении предельного процесса, немного изменяющего уравнения поля таким образом, что дополнительная масса для частиц в пределе не появляется. Получающаяся теория не лоренц-инвариантна до выполнения предельного перехода, но лоренц-инвариантна в пределе. Этот последний метод и будет принят здесь. Он потребует, чтобы в уравнениях (3) и (7) вместо $F_{\mu\nu}$ появилась бы слегка модифицированная функция поля $F_{\mu\nu}^*$, так что мы придем к четырем уравнениям движения:

$$\partial F_{\mu\nu}^* / \partial x_\nu = -4\pi \sum_e \int \frac{dz_\mu}{ds} \delta_4(x-z) ds, \quad (8)$$

$$\partial (F^\dagger)_{\mu\nu} / \partial x_\nu = -4\pi \sum_g \int \frac{dz_\mu}{ds} \delta_4(x-z) ds, \quad (9)$$

$$m \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} = e \frac{dz_\nu}{ds} F_{\mu\nu}(z) \quad (10)$$

для заряженных частиц и

$$m \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} = g \frac{dz_\nu}{ds} (F^\dagger)_{\mu\nu}^*(z) \quad (11)$$

для частиц с полюсами. Эти уравнения, вместе с уравнениями, связывающими F с F^* , которые линейны и будут

приведены далее, образуют полную систему уравнений движения. Они справедливы при произвольных значениях e и g у различных частиц.

III. Электромагнитные потенциалы

Чтобы получить теорию, которая может быть перенесена в квантовую механику, нам нужно привести уравнения движения к форме принципа действия, а для этой цели нам потребуются электромагнитные потенциалы. Обычный путь их введения состоит в том, что полагают

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \quad (12)$$

но это более невозможно, когда есть магнитные полюса, так как (12) приводит к уравнению (4) и, таким образом, противоречит (9). Поэтому (12) необходимо видоизменить.

Если рассмотреть фиксированный момент времени, то уравнения (12) или (4) требуют, чтобы полный магнитный поток, пересекающий любую замкнутую поверхность в этот момент времени, был бы нулем. Это неверно, если внутри замкнутой поверхности есть магнитный полюс. Уравнение (12) должно тогда нарушиться где-либо на поверхности, и мы можем предположить, что оно нарушается только в одной точке. Уравнение (12) будет нарушаться в одной точке на каждой окружающей полюс замкнутой поверхности, так что оно будет нарушаться на некой линии точек, тянущейся из полюса наружу, которую мы будем называть *струной*. Струна может быть произвольной кривой линией, тянущейся из полюса к бесконечности или же к другому полюсу равной и противоположной силы. Каждый полюс должен находиться на конце такой струны.

Переменные, потребные, чтобы фиксировать положения струн, будут рассматриваться как динамические координаты, а сопряженные им импульсы будут введены ниже. Эти переменные нужны для динамической теории, но они не соответствуют чему бы то ни было наблюдаемому, и их значения в конкретных задачах всегда произвольны и не затрагивают физических явлений. Их можно назвать *нефизическими* переменными.

Нефизические переменные и ранее появлялись в динамической теории. Например, в обычной электродинамике дополнительные переменные, потребные для описания потенциалов, когда поля фиксированы — это нефизические

переменные. Более простой пример предоставляет азимутальный угол вращающегося тела, симметричного относительно его оси вращения. Нефизические переменные всегда можно исключить подходящим преобразованием, но это может ввести в теорию такую потерю симметрии, что игра не будет стоить свеч. (Описывающие струны нефизические переменные можно было бы исключить наложением того условия, что струны всегда должны тянуться из каждого полюса к бесконечности в направлении оси x_1 . С фиксированными таким образом струнами не потребовалось бы никаких переменных для их описания, но симметрия уравнений относительно трехмерных вращений была бы полностью испорчена. Физические же следствия теории не были бы затронуты.)

Каждая струна прочерчивает в пространстве-времени двумерную полосу. Эти полосы будут областями, где нарушается (12). Каждую полосу можно описать, выражая общую точку y_μ на ней как функцию двух параметров: τ_0 и τ_1 ,

$$y_\mu = y_\mu(\tau_0, \tau_1).$$

Допустим для определенности, что каждая струна тянется до бесконечности. Тогда можно так устроить параметры τ_0 и τ_1 , что $\tau_1 = 0$ на мировой линии полюса и растет до бесконечности, если следовать до бесконечности по струне, а τ_0 меняется от $-\infty$ до $+\infty$ при переходе от бесконечно прошлого к бесконечно будущему.

Уравнение (12) следует заменить на уравнение вида

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} + 4\pi \sum_g (G^+)_{\mu\nu}, \quad (13)$$

где каждая $(G^+)_{\mu\nu}$ — это полевая величина, которая исчезает всюду кроме одной из полос, а суммирование выполняется по всем полосам, связанным по одной с каждым полюсом. Подставляя (13) в (9), найдем, учитывая (2), что

$$\frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = g \int \frac{dz_\mu}{ds} \delta_4(x-z) ds \quad (14)$$

Это — уравнение, которое определяет $G_{\mu\nu}$.

Легко проверить, что решение уравнения (14) есть

$$G_{\mu\nu}(x) = g \iint \left(\frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y_\nu}{\partial \tau_1} - \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} \frac{\partial y_\nu}{\partial \tau_0} \right) \delta_4(x-y) d\tau_0 d\tau_1, \quad (15)$$

проинтегрированное по всей полосе. В самом деле, (15) дает сразу

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} &= g \iint \left(\frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y_\nu}{\partial \tau_1} - \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} \frac{\partial y_\nu}{\partial \tau_0} \right) \frac{\partial \delta_4(x-y)}{\partial x_\nu} d\tau_0 d\tau_1 = \\ &= -g \iint \left(\frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y_\nu}{\partial \tau_1} - \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} \frac{\partial y_\nu}{\partial \tau_0} \right) \frac{\partial \delta_4(x-y)}{\partial y_\nu} d\tau_0 d\tau_1 = \\ &= -g \iint \left(\frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial \delta_4(x-y)}{\partial \tau_1} - \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} \frac{\partial \delta_4(x-y)}{\partial \tau_0} \right) d\tau_0 d\tau_1. \end{aligned}$$

Согласно теореме Стокса для любых двух функций U и V на полосе

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial \tau_0} \frac{\partial V}{\partial \tau_1} - \frac{\partial U}{\partial \tau_1} \frac{\partial V}{\partial \tau_0} \right) d\tau_0 d\tau_1 = \int U \left(\frac{\partial V}{\partial \tau_0} d\tau_0 + \frac{\partial V}{\partial \tau_1} d\tau_1 \right), \quad (16)$$

где в левой части интеграл берется по любой области на полосе, а в правой части — по ограничивающей эту область кривой. Полагая $U = \delta_4(x-y)$, $V = y_\mu$ и применяя теорему ко всей полосе, так что единственная часть границы не на бесконечности — это мировая линия полюса, получаем

$$\frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = g \int \delta_4(x-y) \left[\frac{\partial y_\mu(\tau_0, 0)}{\partial \tau_0} \right] d\tau_0,$$

что согласуется с (14), поскольку $y_\mu(\tau_0, 0) = z_\mu(s)$, где τ_0 — некоторая функция s .

Для заданных мировых линий частиц то решение уравнений поля (8) и (9), для которого нет падающего поля, называется запаздывающим полем. Оно связано с (13) запаздывающими потенциалами. Запаздывающие потенциалы состоят из вкладов от каждой частицы, зависящих только от мировой линии этой частицы и, в случае, если частица имеет полюс, от присоединенной к ней полосы. Эти вклады можно удобно выразить с помощью лоренц-инвариантной функции $J(x)$, определяемой как

$$J(x) = \begin{cases} 2\delta(x_\mu x^\mu) & \text{для } x_0 > 0, \\ 0 & \text{для } x_0 < 0 \end{cases} \quad (17)$$

или как

$$J(x) = r^{-1} \delta(x_0 - r), \quad r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}.$$

Функция $\Delta(x)$ Йордана и Паули связана с $J(x)$ соотношением

$$\Delta(x) = J(x) - J(-x). \quad (18)$$

Легко проверить, что

$$\square J(x) = 4\pi \delta_4(x) \quad (19)$$

(Этот результат можно проверить вблизи начала координат, выражая интеграл от $\square J(x)$ по малому четырехмерному объему вокруг начала как трехмерный поверхностный интеграл по границе этого объема.)

Вклад заряженной частицы в запаздывающие потенциалы есть, согласно формуле Льенара—Вихерта,

$$A_v^*(x)_{re} = e \int_{-\infty}^{+\infty} J(x-z) \frac{dz_v}{ds} ds. \quad (20)$$

В левую часть вставлено A^* вместо A , поскольку в (8) фигурирует поле F^* .) Соответствующая формула для вклада полюса—это

$$A_v(x)_{re} = g \varepsilon_{\nu\lambda\rho\sigma} \iint \frac{\partial y^\lambda}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\rho}{\partial \tau_1} \frac{\partial J(x-y)}{\partial x^\sigma} d\tau_0 d\tau_1, \quad (21)$$

с интегрированием по всей полосе, где $\varepsilon_{\nu\lambda\rho\sigma}$ —антисимметричный тензор четвертого ранга с $\varepsilon_{0123} = 1$. Чтобы проверить формулу (21), заметим, что она ведет к

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \frac{\partial A_{v\ re}}{\partial x^\mu} = g \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\nu\lambda\rho\sigma} \iint \frac{\partial y^\lambda}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\rho}{\partial \tau_1} \frac{\partial^2 J(x-y)}{\partial y^\mu \partial y^\sigma} d\tau_0 d\tau_1.$$

Используя

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\nu\lambda\rho\sigma} = \delta_\lambda^\mu \delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta + \delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\alpha \delta_\lambda^\beta + \delta_\sigma^\mu \delta_\lambda^\alpha \delta_\rho^\beta - (\alpha\beta),$$

где $-(\alpha\beta)$ означает, что надо вычесть все предыдущие члены с переставленными α и β , получим с помощью теоремы Стокса (16), (19) и (15):

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \frac{\partial A_{v\ re}}{\partial x^\mu} &= g \iint \left\{ \frac{\partial^2 J(x-y)}{\partial \tau_0 \partial y_\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial \tau_1} + \frac{\partial^2 J(x-y)}{\partial \tau_1 \partial y_\alpha} \frac{\partial y^\beta}{\partial \tau_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial y^\alpha}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\beta}{\partial \tau_1} \square J(x-y) \right\} d\tau_0 d\tau_1 - (\alpha\beta) = \\ &= g \int \left[\frac{\partial J(x-y)}{\partial y_\beta} \right]_{y=z} \frac{dz^\alpha}{ds} ds - (\alpha\beta) + 4\pi G^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Согласно (13) это приводит к запаздывающему полю

$$\begin{aligned} (F^\dagger)_{re}^{\alpha\beta} &= \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \frac{\partial A_{v\ re}}{\partial x^\mu} - 4\pi G^{\alpha\beta} = \\ &= -g \int \frac{\partial J(x-z)}{\partial x_\beta} \frac{dz^\alpha}{ds} ds - (\alpha\beta) = -\frac{\partial B_{re}^\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial B_{re}^\beta}{\partial x_\alpha}, \quad (22) \end{aligned}$$

где

$$B_{re}^\alpha = g \int J(x-z) \frac{dz^\alpha}{ds} ds. \quad (23)$$

Из аналогии (23) с потенциалом Льенара—Вихерта (20) видно, что это—правильное выражение для создаваемого полюсом запаздывающего поля.

В обычной электродинамике потенциалы ограничены условием

$$\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial A_\nu^*}{\partial x_\nu} = 0. \quad (24)$$

Это условие можно сохранить и в настоящей теории, поскольку оно удовлетворено для запаздывающих потенциалов (20), (21). Обе формы условия (24) эквивалентны благодаря линейной связи между полями со звездочкой и без звездочки (см. (29)).

IV. Принцип действия

Интеграл действия обычной электродинамики можно выразить в виде суммы трех членов $I_1 + I_2 + I_3$, где I_1 —это интеграл действия для одних частиц,

$$I_1 = \sum_e m \int ds,$$

I_2 —интеграл действия для одного поля,

$$I_2 = (16\pi)^{-1} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x \quad (d^4x = dx_0 dx_1 dx_2 dx_3),$$

а I_3 —вклад взаимодействия зарядов с полем,

$$I_3 = \sum_e e \int A^\nu(z) \frac{dz_\nu}{ds} ds. \quad (25)$$

Поля $F_{\mu\nu}$ в I_2 рассматриваются как функции потенциалов.

Тот же интеграл действия подойдет нам и в настоящей теории, если только расширить сумму в I_1 так, чтобы она включала не только частицы с зарядами, но в равной мере и частицы с полюсами

$$I_1 = \sum_{e+g} m \int ds. \quad (26)$$

Для взаимодействия между полюсами и полем не нужно дополнительного члена, оно будет учтено в I_2 , если рассматривать теперь в нем $F_{\mu\nu}$ как функцию потенциалов и струнных переменных $y_\mu(\tau_0, \tau_1)$, задаваемую формулами (13) и (15).

Чтобы избежать в уравнениях движения бесконечностей, возникающих из бесконечных полей, создаваемых

точечными зарядами и полюсами, сделаем небольшое видоизменение уравнения поля, заменяя I_2 на

$$I'_2 = (16\pi)^{-1} \iint F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x') \gamma(x-x') d^4x d^4x',$$

где $\gamma(x)$ — функция, которая приближает функции $\delta_4(x)$ и притом так, что стремится к $\delta_4(x)$ в пределе. Мы примем, что

$$\gamma(-x) = \gamma(x), \quad (27)$$

и примем другие свойства $\gamma(x)$, которые потребуются впредь, но точная форма $\gamma(x)$ останется произвольной. Мы можем записать I'_2 как

$$I'_2 = (16\pi)^{-1} \int F_{\mu\nu}^*(x) F^{\mu\nu}(x) d^4x, \quad (28)$$

используя то обозначение, что для любой полевой величины $U(x)$

$$U^*(x) = \int U(x') \gamma(x-x') d^4x'. \quad (29)$$

Проверим теперь, что варьирование

$$I = I_1 + I'_2 + I_3$$

приводит к правильным уравнениям движения. Вариация I_1 хорошо известна и дает

$$\delta I_1 = - \sum_{e+g} m \int \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} \delta z^\mu ds. \quad (30)$$

Варьирование I_3 может быть проведено так же, как и в обычной электродинамике, и дает

$$\delta I_3 = \sum_e e \int \left\{ \left[\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right]_{x=z} \delta z^\mu + (\delta A_\nu)_{x=z} \right\} \frac{dz^\nu}{ds} ds. \quad (31)$$

Варьирование I'_2 дает, с помощью (27),

$$\begin{aligned} \delta I'_2 &= (8\pi)^{-1} \iint F_{\mu\nu}(x') \delta F^{\mu\nu}(x) \gamma(x-x') d^4x d^4x' = \\ &= (8\pi)^{-1} \int F_{\mu\nu}^*(x) \delta F^{\mu\nu}(x) d^4x. \end{aligned}$$

Подставляя для $F^{\mu\nu}$ его значение, задаваемое уравнением (13), получим

$$\delta I'_2 = -(4\pi)^{-1} \int F_{\mu\nu}^* \left(\frac{\partial \delta A^\mu}{\partial x_\nu} \right) d^4x + \frac{1}{2} \sum_g \int F_{\mu\nu}^* \delta (G^\dagger)^{\mu\nu} d^4x = \quad (32)$$

$$= (4\pi)^{-1} \int \left(\frac{\partial F_{\mu\nu}^*}{\partial x_\nu} \right) \delta A^\mu d^4x + \frac{1}{2} \sum_g (F^\dagger)_{\mu\nu}^* \delta G^{\mu\nu} d^4x. \quad (33)$$

С помощью (15) для второго члена получается

$$\begin{aligned}
 & \sum_g g \int (F^\dagger)_{\mu\nu}^* d^4x \delta \iint \frac{\partial y^\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\nu}{\partial \tau_1} \delta_4(x-y) d\tau_0 d\tau_1 = \\
 & = \sum_g g \int (F^\dagger)_{\mu\nu}^* d^4x \iint \left\{ \delta \left(\frac{\partial y^\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\nu}{\partial \tau_1} \right) \delta_4(x-y) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial y^\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\nu}{\partial \tau_1} \frac{\partial \delta_4(x-y)}{\partial y^\rho} \delta y^\rho \right\} d\tau_0 d\tau_1 = \\
 & = \sum_g g \iint \left\{ (F^\dagger)_{\mu\nu}^*(y) \left(\frac{\partial \delta y^\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\nu}{\partial \tau_1} - \frac{\partial \delta y^\mu}{\partial \tau_1} \frac{\partial y^\nu}{\partial \tau_0} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial (F^\dagger)_{\mu\nu}^*(y)}{\partial y^\rho} \frac{\partial y^\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\nu}{\partial \tau_1} \delta y^\rho \right\} d\tau_0 d\tau_1 = \\
 & = \sum_g g \iint \left\{ \frac{\partial ((F^\dagger)_{\mu\nu}^* \delta y^\mu)}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\nu}{\partial \tau_1} - \frac{\partial ((F^\dagger)_{\mu\nu}^* \delta y^\mu)}{\partial \tau_1} \frac{\partial y^\nu}{\partial \tau_0} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\partial (F^\dagger)_{\mu\nu}^*}{\partial y^\rho} \left(\frac{\partial y^\rho}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\nu}{\partial \tau_1} \delta y^\mu - \frac{\partial y^\rho}{\partial \tau_1} \frac{\partial y^\nu}{\partial \tau_0} \delta y^\mu - \frac{\partial y^\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\nu}{\partial \tau_1} \delta y^\rho \right) \right\} \times \\
 & \quad \times d\tau_0 d\tau_1 = \sum_g g \int (F^\dagger)_{\mu\nu}^*(z) \delta z^\mu \frac{dz^\nu}{ds} ds - \\
 & - \sum_g g \iint \left(\frac{\partial (F^\dagger)_{\mu\nu}^*}{\partial y^\beta} + \frac{\partial (F^\dagger)_{\nu\rho}^*}{\partial y^\mu} + \frac{\partial (F^\dagger)_{\rho\mu}^*}{\partial y^\nu} \right) \frac{\partial y^\rho}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\nu}{\partial \tau_1} \delta y^\mu d\tau_0 d\tau_1
 \end{aligned} \tag{34}$$

дальнейшим применением теоремы Стокса (16). Полная вариация δI дается суммой (30), (31), (34) и первого члена в (33).

Приравнявая нулю коэффициент при $\delta A^\mu(x)$ в δI , мы получаем в точности уравнение (8). Приравнявая нулю коэффициент при δz^μ для заряженных частиц, получаем

$$m \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} = e \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right)_{x=z} \frac{dz^\nu}{ds}.$$

Это совпадает с уравнением движения (8), если только заряженные частицы не лежат на какой-либо из струн, так что $G_{\mu\nu}(z) = 0$. Приравнявая нулю коэффициенты при δz^μ для полюса, мы получаем в точности (11). Уравнение (9) — это следствие уравнений (13) и (15), которые выражают $F_{\mu\nu}$ через потенциалы и струнные переменные. Таким образом, все уравнения движения (8), (9), (10) и (11) следуют из принципа действия $\delta I = 0$, если только мы наложим то условие, что струна никогда не должна проходить сквозь заряженную частицу.

Приравнивая нулю коэффициент при вариации δy^μ струнной переменной, найдем

$$\frac{\partial (F^\dagger)_{\mu\nu}^*}{\partial y^\rho} + \frac{\partial (F^\dagger)_{\nu\rho}^*}{\partial y^\mu} + \frac{\partial (F^\dagger)_{\rho\mu}^*}{\partial y^\nu} = 0$$

или

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}^*}{\partial y_\nu} = 0,$$

что должно выполняться во всех точках полосы. Благодаря (8) это выполняется автоматически, если только струна никогда не проходит через заряженную частицу. Поэтому принцип действия не приводит ни к каким уравнениям движения для струнных переменных в соответствии с нефизической природой этих переменных.

I — правильный интеграл действия, и его можно использовать в качестве основы электродинамической теории, но в гамильтоновой формулировке уравнений движения он ведет к некоторым неудобствам, так как импульс, сопряженный A_0 , исчезает тождественно. Это неудобство можно обойти с помощью метода, обязанного Ферми и состоящего в добавлении к интегралу действия дополнительного члена

$$I_4 = (8\pi)^{-1} \int \frac{\partial A_\nu^*}{\partial x_\mu} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} d^4x. \quad (35)$$

Он дает

$$\delta I_4 = (4\pi)^{-1} \int \frac{\partial A_\nu^*}{\partial x_\mu} \frac{\partial \delta A_\mu}{\partial x_\nu} d^4x = \quad (36)$$

$$= -(4\pi)^{-1} \int \frac{\partial^2 A_\nu^*}{\partial x_\nu \partial x^\mu} \delta A^\mu d^4x \quad (37)$$

и приводит к добавочному члену $-\partial^2 A_\nu^* / \partial x_\nu \partial x^\mu$ в левой части уравнения (8). Этот добавочный член в (8) не влияет на уравнения движения, поскольку он пропадает благодаря дополнительному условию (24), но в гамильтоновой формулировке необходимо проводить различие между такими уравнениями, которые выполняются только в силу дополнительных условий, и такими, которые от дополнительных условий не зависят. Поэтому мы должны сохранить этот член в (8), чтобы иметь уравнение последнего рода. Тогда с помощью (13) и (15) уравнение (8) может быть записано как

$$\square A_\mu^*(x) = 4\pi \sum_e \int \frac{dz_\mu}{ds} \delta_4(x-z) ds + 4\pi \sum \frac{\partial (G^\dagger)_{\mu\nu}^*}{\partial x}. \quad (38)$$

V. Метод перехода к гамильтоновой формулировке

Когда имеются уравнения движения динамической системы в форме принципа действия, то в качестве следующего шага в процессе квантования надо перевести их в гамильтонову форму. Общая процедура этого состоит в том, чтобы взять интеграл действия сперва для определенного времени t и затем образовать его вариацию, разрешая t меняться. Эта вариация окажется линейной функцией δt и вариаций δq динамических координат в момент времени t , все остальные члены уничтожатся, если использовать уравнения движения. Вводят полную вариацию конечных q

$$\Delta q = \delta q + \dot{q} \delta t$$

и выражают δI через Δq_r и δt . Это выражение полагают равным

$$\delta I = \sum p_r \Delta q_r - W \delta t \quad (39)$$

(или соответствующему выражению с интегралом вместо суммы) и определяют таким образом импульсы p_r и энергию W . При этом p_r и W появляются как функции координат q_r и скоростей \dot{q}_r , и поскольку число переменных в наборе p_r, W на единицу больше числа скоростей \dot{q}_r , то должно существовать соотношение между p_r, W и координатами типа

$$W - H(pq) = 0. \quad (40)$$

Переменные p_r и $-W$ суть частные производные I по q_r и t , так что (40) дает дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет I , называемое *уравнением Гамильтона—Якоби*. От этого уравнения можно перейти к волновому уравнению квантовой механики, применяя определенные правила. Может оказаться больше одного уравнения, связывающего p_r, q_r и W ; в таком случае будет больше одного уравнения Гамильтона—Якоби, ведущих больше чем к одному волновому уравнению.

Чтобы сделать описанную выше процедуру релятивистской, надо взять интеграл действия по всему пространству-времени, предшествующему некоторой трехмерной пространственно-подобной поверхности S , простирающейся до бесконечности¹⁾. Затем надо образовать его вариацию,

¹⁾ Ср. статью 17 настоящего сборника.—Примеч. ред.

подвергая общему варьированию как S , так и предшествующие S динамические координаты, и выразить результат через общие вариации различных динамических величин на S . Это снова даст уравнение типа (39), и можно будет снова определить коэффициенты в нем как импульсы и построить уравнение Гамильтона—Якоби.

Существуют разнообразные способы модификации этой процедуры, которые могут быть удобны в частных задачах. Вместо того, чтобы резко останавливать интеграл действия на определенном времени или на определенной трехмерной пространственно-подобной поверхности S , можно остановить разные члены на различных временах. Можно описать остановку интеграла действия, предполагая, что динамическая система перестает существовать (go out of existence) некоторым неестественным способом, и беря полное действие, пока она не перестанет существовать. Чтобы остановить разные члены интеграла действия в разные времена, надо представить себе, что разные части динамической системы перестают существовать при разных временах. После того как некоторые части уже перестали существовать, оставшиеся части продолжают двигаться в соответствии с уравнениями движения, которые следуют из сохранившихся членов интеграла действия, пока они в свой черед не перестанут существовать. Различные способы остановки интеграла действия ведут к различным уравнениям Гамильтона—Якоби (40), которые в равной степени выполняются и отличаются одно от другого контактными преобразованиями.

Когда есть частицы, взаимодействующие с полем, то удобным способом остановки интеграла действия будет допущение, что сперва частицы прекращают существование в точках пространства-времени, лежащих вне взаимных световых конусов, а затем поле останавливается при значительно более позднем времени. Этот остановленный интеграл действия меняют, варьируя точки z_μ в пространстве-времени, где частицы перестают существовать, а также поверхность S_F , на которой перестает существовать поле. Приравнивая нулю ту часть вариации остановленного интеграла действия, которая не содержит граничных вариаций, получают для частиц (до того, как они перестают существовать) те же самые уравнения, что и получавшиеся из неостановленного интеграла действия, и получают уравнения поля, которые продолжают управлять полем после того, как частицы перестали существовать. Из-за того, что вариации Δz_μ в точках z_μ происходят

В пространственно-временных областях, полностью погруженных в поле, получаются уравнения, работать с которыми гораздо удобнее, чем с получаемыми обычным методом, в котором принимается, что частицы и поле перестают существовать совместно.

В новой электродинамике мы примем, что все частицы, а также и относящиеся к полюсам струны перестают существовать на трехмерной пространственно-подобной поверхности S_P и что электромагнитное поле перестает существовать на значительно более поздней поверхности S_F . Это означает, что задаваемые (25), (26) интегралы I_1, I_3 должны быть остановлены, когда мировая линия достигает S_P , и что интеграл по полосе в (15) должен быть остановлен, когда полоса достигает S_P , в то время как задаваемые (28), (35) интегралы I'_2, I_4 должны быть остановлены на границе S_F . Остановка этих интегралов не затронет уравнений движения для частиц и поля раньше S_P , а именно (10), (11), (38), и, далее, (38) будет продолжать выполняться и на S_P и позднее ее, вплоть до S_F .

Допустим, что связь (29) между полевыми величинами U и U^* такова, что значение одной из них в точке x определяется значениями другой в пространственно-временных точках вблизи x . Поэтому, если одна из них обращается в нуль в некоторой области пространства-времени, то вторая тоже обращается в нуль в этой области, кроме как, возможно, в точках вблизи границы.

Поскольку $G_{\mu\nu}$ исчезает всюду, кроме полос, то теперь и $G_{\mu\nu}^*$ должна исчезать в области между S_P и S_F , исключая точки, вблизи которых струны перестают существовать. В этой области у нас обратится в нуль и первая сумма в правой части (38), поскольку интегралы останавливаются на S_P , и по этому мы можем заключить из (38), что

$$\square A_{\mu}^*(x) = 0. \quad (41)$$

Таковыми же рассуждениями мы можем заключить, что

$$\square A_{\mu}(x) = 0 \quad (42)$$

в области между S_P и S_F , кроме тех точек, вблизи которых перестают существовать заряженные частицы.

В областях, где выполняются (42) и (41), мы можем разложить $A(x)$ и $A_{\mu}^*(x)$ по Фурье:

$$A_{\mu}(x) = \sum_{k_0} \int A_{k\mu} e^{i(kx)} k_0^{-1} d^3k, \quad (43)$$

$$A_{\mu}^*(x) = \sum_{k_0} \int A_{k\mu}^* e^{i(kx)} k_0^{-1} d^3k, \quad (44)$$

где

$$(kx) = k_0 x_0 - k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3, \\ d^3 k = dk_1 dk_2 dk_3 \quad \text{и} \quad k_0 = \pm (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)^{1/2},$$

а \sum_{k_0} означает сумму по обоим значениям k_0 для данных k_1, k_2, k_3 . Множитель k_0^{-1} введен потому, что $k_0^{-1} d^3 k$ есть лоренцев инвариант. То условие, что $A_\mu(x)$ и $A_\mu^*(x)$ вещественны, дает:

$$A_{-k\mu} = -\bar{A}_{k\mu}, \quad A_{-k\mu}^* = -\bar{A}_{k\mu}^*. \quad (45)$$

Пусть фурье-разложением функции $\gamma(x)$ будет

$$\gamma(x) = (2\pi)^{-4} \int \gamma_l e^{i(lx)} d^4 l$$

с

$$\gamma_{-l} = \bar{\gamma}_l.$$

Условие $\gamma(-x) = \gamma(x)$ дает

$$\gamma_{-l} = \gamma_l, \quad (46)$$

так что γ_l вещественно. Тогда прямым интегрированием найдем, что

$$A_{k\mu}^* = \gamma_k A_{k\mu}. \quad (47)$$

Нам понадобится, чтобы фурье-разложение (43) выполнялось бы в каждой точке z , где перестает существовать заряженная частица, и чтобы фурье-разложение (44) выполнялось бы в каждой точке y , где перестает существовать струна. Кажется вероятным, что этого можно добиться подходящим выбором функции γ , поскольку точка y никогда не бывает очень близкой к точке z . Примем, что полевая величина $U(x)$ определяется значениями $U^*(x')$ в точках x' , лежащих вблизи x и вне светового конуса x . Тогда $A_\mu(z)$ будет определяться значениями $A_\mu^*(x')$ в точках x' , для которых справедливо фурье-разложение (44), так что фурье-разложение для $A_\mu(z)$ тоже будет выполняться. Аналогично, фурье-разложение $A_\mu^*(y)$ будет выполняться, если $U^*(x)$ определяется значениями $U(x')$ в точках x' , лежащих вблизи x и вне светового конуса x .

Дополнительное условие (24) в области между S_P и S_F претерпевает изменение. Если интегралы (20), (21) остановлены на S_P , то записывая z' для $z(s')$, мы найдем,

что

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{\nu}^*}{\partial x_{\nu}} &= \sum_e e \int_{-\infty}^s \frac{\partial J(x-z')}{\partial x_{\nu}} \frac{dz'_{\nu}}{ds'} ds' = \\ &= - \sum_e e \int_{-\infty}^s \frac{\partial J(x-z')}{\partial z'_{\nu}} \frac{dz'_{\nu}}{ds'} ds' = - \sum_e e J(x-z). \end{aligned} \quad (48)$$

Эта величина отлична от нуля, если x лежит на световом конусе будущего одной из точек z , где перестает существовать заряженная частица. Уравнения (41) и (48) показывают, что потенциалы A_{μ}^* приводят между S_P и S_F к полю типа Вентцеля¹⁾.

VI. Гамильтонова формулировка

Образует вариацию интеграла действия, ограниченного, как то указано выше, при изменении S_P , но не S_F , и вычислим в δI член, связанный с поверхностью. Члены, возникающие из δI_1 и δI_3 , — такие же, как и в обычной электродинамике:

$$\sum_{e+g} m \frac{dz_{\mu}}{ds} \Delta z^{\mu} + \sum_e e A_{\mu}(z) \Delta z^{\mu}, \quad (49)$$

где Δz^{μ} — полное изменение координат точки, где частица перестает существовать. При образовании $\delta I'_2$ мы не можем более пользоваться (32), но должны использовать вместо этого

$$\begin{aligned} \delta I'_2 &= - (8\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{S_F} \left\{ F_{\mu\nu}^* \frac{\partial \delta A^{\mu}}{\partial x_{\nu}} + F_{\mu\nu} \frac{\partial \delta A^{\mu*}}{\partial x_{\nu}} \right\} d^4x + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_g \int_{-\infty}^{S_F} \{ F_{\mu\nu}^* \delta (G^{\dagger})^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \delta (G^{\dagger})^{\mu\nu*} \} d^4x. \end{aligned} \quad (50)$$

Второй член здесь равен

$$\frac{1}{2} \sum_g \int_{-\infty}^{\infty} F_{\mu\nu}^* \delta (G^{\dagger})^{\mu\nu} d^4x,$$

если только S_F существенно позже, чем S_P , так что $\gamma(x-x') = 0$ для x более ранних, чем S_P и x' , более позд-

¹⁾ Свойства такого поля приведены, например, в работе Dirac P. // Annales de l'Inst. Henri Poincaré. — 1939. — V. 9. — P. 23.

них, чем S_F . Мы можем теперь использовать вычисления, которые привели нас к (34), с интегралами по полосам, распространенными только на предшествующие S_P части полос, что даст дополнительные члены, возникающие из применения теоремы Стокса, как интегралы по контурам, образованным линиями пересечения полос с S_P . Устраивая параметризацию на полосах таким образом, что линия, по которой полоса встречается S_P , задается уравнением $\tau_0 = \text{константе}$, и линия, по которой варьированная полоса встречается варьированную S_P , задается уравнением $\tau_0 = \text{той же самой константе}$, получаем для этих линейных интегралов

$$\sum_g g \int_0^\infty (F^\dagger)_{\mu\nu}{}^* \delta y^\mu \frac{dy^\nu}{d\tau_1} d\tau_1. \quad (51)$$

Линии интегрирования — это положения струн, когда они перестают существовать. Образуя δI_4 , мы не можем более пользоваться (36), но должны использовать вместо него

$$\delta I_4 = (8\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{S_F} \left\{ \frac{\partial A_\nu{}^*}{\partial x^\mu} \frac{\partial \delta A^\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial \delta A^{\mu*}}{\partial x_\nu} \right\} d^4x. \quad (52)$$

Это величина такого же строения, как первый член в правой части (50), и оба вместе дают, путем интегрирования по частям, граничный член в форме интеграла по трехмерной поверхности S_F , который можно записать как

$$\frac{1}{8\pi} \int \left\{ \frac{\partial A_\mu{}^*}{\partial x^\nu} \delta A^\mu + \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta A^{\mu*} \right\} dS^\nu, \quad (53)$$

где dS^ν — элемент этой поверхности. Все остальные члены в δI уничтожаются при использовании уравнений движения, если только S_F не очень близка к S_P , так что мы остаемся с δI , равной сумме (49), (51) и (53).

С этим выражением для δI мы еще не можем прямо ввести импульсы согласно формуле (39), поскольку A^μ , $A^{\mu*}$, вариации которых входят в (53), не независимы и поскольку мы не варьировали S_F . Удобный способ работы состоит в том, чтобы перейти к фурье-компонентам потенциалов, для которых мы можем использовать фурье-разложения (43) и (44), ибо в выражении (53) мы имеем дело с потенциалами на поверхности S_F . Будем считать, что варьированное движение удовлетворяет уравнениям движения, так что фурье-разложения (43), (44) справедливы на S_F и для варьированного движения. Тогда

выражение (53) принимает, с помощью (47), вид

$$(8\pi)^{-1} i \sum_{k_0, k'_0} \iiint k_\nu (\gamma_k + \gamma_{k'}) \times \\ \times A_{k\mu} \delta A_{k,\mu} e^{i(k+k', x)} k_0^{-1} d^3 k k_0'^{-1} d^3 k' dS^\nu.$$

Если мы выберем ради простоты поверхность S_F , равную $x_0 = \text{const}$ (любая пространственно-подобная поверхность должна дать тот же конечный результат), это превратится после интегрирования по x_1, x_2 и x_3 в

$$\pi^2 i \sum_{k_0, k'_0} \iiint (\gamma_k + \gamma_{k'}) \times \\ \times A_{k\mu} \delta A_{k,\mu} e^{i(k_0+k'_0)x_0} \delta_3(k+k') d^3 k k_0^{-1} d^3 k',$$

где $\delta_3(k)$ означает $\delta(k_1)\delta(k_2)\delta(k_3)$. Множитель $\delta_3(k+k')$ здесь показывает, что подынтегральное выражение пропадает, кроме как для $k'_r = -k_r$ ($r = 1, 2, 3$), что влечет за собой $k'_0 = \pm k_0$. Поэтому выражение сводится, с помощью (46), к

$$- 2\pi^2 i \sum_{k_0} \int \gamma_k A_{k\mu} \delta A_{-k,\mu} k_0^{-1} d^3 k + \\ + \pi^2 i \sum_{k_0} \int (\gamma_k + \gamma_{k_0, -k_r}) A_{k\mu} \delta A_{k_0, -k_r,\mu} e^{2ik_0 x_0} k_0^{-1} d^3 k.$$

Второй член здесь можно записать в виде полного дифференциала

$$\pi^2 i \delta \sum_{k_0} \int \gamma_k A_{k\mu} A_{k_0, -k_r,\mu} e^{2ik_0 x_0} k_0^{-1} d^3 k,$$

и потому его можно отбросить. Первый же член можно — если мы ограничим k_0 условием быть > 0 и используем (45) и (46) — записать как

$$2\pi^2 i \int \gamma_k (A_{k\mu} \delta \bar{A}_k^\mu - \bar{A}_{k\mu} \delta A_k^\mu) k_0^{-1} d^3 k = \\ = 2\pi^2 i \delta \int \gamma_k A_{k\mu} \bar{A}_k^\mu k_0^{-1} d^3 k - 4\pi^2 i \int \gamma_k \bar{A}_{k\mu} \delta A_k^\mu k_0^{-1} d^3 k. \quad (54)$$

Первый член в (54) — это опять полный дифференциал, который можно отбросить. Мы приходим таким образом к тому конечному выводу, что δI — с точностью до полных дифференциалов — равна сумме (49), (51) и второго члена (54).

Мы выберем в качестве динамических координат координаты z_μ частиц, когда они перестают существовать, координаты y_μ (τ_1) точек на струне, когда она перестает существовать (образующие одномерный континуум коор-

динат для каждого полюса и каждого значения μ), и фурье-компоненты $A_{k\mu}$ с $k_0 > 0$ потенциалов, после того как все частицы и струны перестали существовать. Коэффициенты при вариациях этих координат в выражении для δI , даваемом суммой выражений (49), (51) и второго члена в (54), будут сопряженными импульсами. Поэтому импульсы заряженной частицы — это

$$p_\mu = m \frac{dz_\mu}{ds} + eA_\mu(z), \quad (55)$$

для частицы с полюсом —

$$p_\mu = m \frac{dz_\mu}{ds}, \quad (56)$$

импульсами, сопряженными струнным переменным $y^\mu(\tau_1)$ (назовем их $\beta^\mu(\tau_1)$), будут

$$\beta_\mu(\tau_1) = g(F^+)_{\mu\nu} \frac{dy^\nu}{d\tau_1}, \quad (57)$$

и импульсами, сопряженными к $A_{k\mu}$, будут

$$-4\pi^2 i \gamma_k \bar{A}_{k\mu} k_0^{-1}. \quad (58)$$

Струнные импульсы $\beta_\mu(\tau_1)$ образуют одномерный континуум переменных, соответствующий одномерному континууму координат $y^\mu(\tau_1)$, а полевые импульсы (58) образуют трехмерный континуум, соответствующий трехмерному континууму координат поля.

Мы можем ввести скобки Пуассона обычным образом. Для координат и импульсов каждой частицы получим

$$[p_\mu, z_\nu] = g_{\mu\nu}. \quad (59)$$

Для координат и импульсов струны получим

$$[\beta_\mu(\tau_1), y_\nu(\tau_1)] = g_{\mu\nu} \delta(\tau_1 - \tau_1'), \quad (60)$$

а для полевых переменных получим, в соответствии с (58)

$$[\bar{A}_{k\mu}, A_{k'\nu}] = i(4\pi^2)^{-1} g_{\mu\nu} \gamma_k^{-1} k_0 \delta_3(k - k'). \quad (61)$$

Все остальные СП равны нулю.

В пределе $\gamma(x) \rightarrow \delta_3(x)$ получится $\gamma_k \rightarrow 1$ и (61) даст, обычные СП-соотношения для фурье-амплитуд электромагнитных потенциалов. Если мы выберем $\gamma_k^{-1} = \cos(k\lambda)$, где λ — малый четырех-вектор, удовлетворяющий $\lambda^2 > 0$, и сделаем предельный переход $\lambda \rightarrow 0$, мы придем к предельному процессу, который уже использовался в электродинамике, классической и квантовой, и который дает воз-

возможность преодолеть некоторые из трудностей, связанных с бесконечными полями, вызываемыми точечными частицами. Это значение для γ_k могло бы оказаться пригодным в настоящей теории, однако я не исследовал, в какой мере оно было бы совместным со всеми требованиями на функцию $\gamma(x)$.

Мы можем исключить из уравнений (55) и (56) скорости dz_μ/ds и получить

$$\{p_\mu - eA_\mu(z)\} \{p^\mu - eA^\mu(z)\} - m^2 = 0. \quad (62)$$

для каждой заряженной частицы и

$$p_\mu p^\mu - m^2 = 0 \quad (63)$$

для каждой частицы с полюсом. Эти уравнения должны быть объединены с (57) или с

$$\beta_\mu(\tau_1) - g(F^\dagger)_{\mu\nu}{}^*(y) \frac{dy^\nu}{d\tau_1} = 0. \quad (64)$$

Если $A_\mu(z)$ в (62) и $(F^\dagger)_{\mu\nu}{}^*(y)$ в (64) выражены через фурье-компоненты $A_{k\mu}$, $\bar{A}_{k\mu}$ (законность этого была обсуждена перед концом предыдущего раздела), то (62), (63) и (64) суть уравнения, содержащие только динамические координаты и импульсы. Они будут дифференциальными уравнениями, которым удовлетворяет интеграл действия I , если рассматривать импульсы как производные от I , и они будут уравнениями Гамильтона—Якоби настоящей теории. Поскольку известно, что они имеют решение—именно, сам интеграл действия I ,—мы можем заключить из теории дифференциальных уравнений, что все СП их левых частей должны обращаться в нуль, что можно проверить и прямой выкладкой, исходя из (59), (60) и (61).

На этом этапе следовало бы ввести дополнительные условия (48) и трактовать их как дальнейшие уравнения Гамильтона—Якоби. Различные уравнения (48), получаемые выбором разных полевых точек x , не независимы от уравнений движения и друг от друга. Мы получим из них полный набор независимых уравнений, выполняя разложение Фурье в области между S_P и S_F . В этой области мы можем, в силу (18), заменить $J(x-z)$ на $\Delta(x-z)$, фурье-компоненты которой даются формулой

$$\Delta(x-z) = -i(4\pi^2)^{-1} \sum_{k_q} \int e^{i(k, x-z)} k_0^{-1} d^3k, \quad (65)$$

так что фурье-разложение (48) в этой области даст, при $k_0 > 0$,

$$k^{\nu} \gamma_k A_{k\nu} - (4\pi^2)^{-1} \sum_e e e^{-i(kz)} = 0, \quad (66)$$

$$k^{\nu} \gamma_k \bar{A}_{k\nu} - (4\pi^2)^{-1} \sum_e e e^{i(kz)} = 0. \quad (67)$$

Эти уравнения включают только динамические координаты и импульсы, так что они имеют правильную форму, чтобы образовать уравнения Гамильтона—Якоби. Легко проверить, что они вместе с предыдущими уравнениями Гамильтона—Якоби (62), (63), (64) образуют совместную систему дифференциальных уравнений для I , проверяя, что все СП их левых частей обращаются в нуль.

VII. Квантование

От приведенной выше гамильтоновой формулировки классической электродинамики можно перейти к квантовой электродинамике, применяя обычные правила. Заменяют динамические координаты и импульсы классической теории операторами, удовлетворяющими перестановочным соотношениям, соответствующим СП-соотношениям (59), (60) и (61), и заменяют уравнения Гамильтона—Якоби волновыми уравнениями, которые получают, приравнявая нулю левые части уравнений Гамильтона—Якоби (содержащие теперь операторы для динамических переменных), примененные к волновой функции ψ . Полученные таким образом волновые уравнения будут совместны друг с другом, поскольку действующие на ψ операторы в их левых частях коммутируют, что можно заключить из обращения в нуль СП левых частей уравнений Гамильтона—Якоби.

Такое прямолинейное квантование приводит для всех частиц к волновым уравнениям типа Клейна—Гордона, что соответствует отсутствию у них спина. Чтобы иметь дело с электронами, надо было бы заменить эти волновые уравнения волновыми уравнениями, соответствующими спину $1/2 \hbar$. Мы не обладаем никакой информацией касательно спина полюсов и можем предварительно принять, что их спин тоже $1/2 \hbar$, ибо это дает простейшую релятивистскую теорию. Переход от нулевого спина к спину $1/2 \hbar$ не затрагивает взаимной совместности волновых уравнений.

Теперь у нас получается следующая схема волновых уравнений, выраженная через набор обычных спиновых

матриц $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_m$ для каждой частицы:

$$\{p_0 - eA_0(z) - \alpha_r [p_r - eA_r(z)] - \alpha_m m\} \psi = 0 \quad (68)$$

для каждой заряженной частицы;

$$\{p_0 - \alpha_r p_r - \alpha_m m\} \psi = 0 \quad (69)$$

для каждой частицы с полюсом;

$$\left\{ \beta_\mu(\tau_1) - g(F^\dagger)_{\mu\nu}{}^*(y) \frac{dy^\nu}{d\tau_1} \right\} \psi = 0 \quad (70)$$

для каждой струны и

$$\begin{cases} \left\{ 4\pi^2 k^\nu A_{k\nu} - \sum_e e e^{-i(kz)} \right\} \psi = 0, \\ \left\{ 4\pi^2 k^\nu \bar{A}_{k\nu} - \sum_e e e^{i(kz)} \right\} \psi = 0 \end{cases} \quad (71)$$

для переменных поля. Волновая функция ψ может быть выбрана как функция описывающих частицы переменных z_μ , подходящих спиновых переменных для каждой частицы, струнных переменных $y_\mu(\tau_1)$ с $0 < \tau_1 < \infty$ и полевых переменных $A_{k\nu}$. Она определена, только если все точки $z_\mu, y_\mu(\tau_1)$ лежат вне световых конусов друг друга.

На первый взгляд, уравнение (69) наводит на мысль, что электромагнитное поле не действует на полюса. Однако оно действует, как то видно из (70), на струны, и поскольку полюса связаны со струнами, будучи их концами, то поле влияет на движение полюсов. То, что оно влияет на него на самом деле, можно вывести из аналогии с классической теорией, в которой полюса движутся согласно (11).

VIII. Единичный заряд и полюс

Интеграл действия I классической теории можно рассматривать как функцию тех точек z_μ в пространстве-времени, где перестают существовать частицы, линий $y_\mu(\tau_1)$ в пространстве-времени, где перестают существовать струны, и подходящих переменных поля, и определен только при условии, что струны не проходят ни через одну из точек, где заряженные частицы перестают существовать. Он, однако, не является однозначной функцией этих переменных, что можно увидеть следующим образом.

Проведем непрерывное изменение переменных в I в соответствии со следующей процедурой. Мы будем держать все точки частиц z_μ , а также — все струны, кроме одной,

фиксированными. Эту последнюю мы будем менять непрерывно, держа ее все время на трехмерной поверхности S_P , и окружим ею одну из точек z_μ , где находилась заряженная частица непосредственно перед тем, как перестала существовать, возвращая струну обратно в ее исходное положение. В это время потенциалы $A_\mu(x)$ меняются непрерывно, так чтобы все время сохранялось выполнение соотношений (13), (15) для фиксированного значения поля $F_{\mu\nu}(x)$, и возвращаются обратно к их первоначальным значениям вместе со струной. Мы получили здесь непрерывную деформацию переменных в интеграле I , которая возвращает их к их исходным значениям, и эту деформацию нельзя непрерывно стянуть так, чтобы никакой деформации не было бы вовсе, поскольку мы не можем заставить струну пройти через заряженную частицу. Струна будет заметать замкнутую двумерную поверхность, скажем σ , лежащую в S_P , и окружающую точку z_μ , где находится заряд, и эта поверхность σ не может быть непрерывно стянута в нуль, поскольку она не должна проходить через заряд. Поэтому можно ожидать, что в процессе такой деформации I изменится, и его вариацию DI можно легко подсчитать следующим образом.

Малая вариация струн и потенциалов при фиксированных точках частиц z_μ ведет к вариации I , задаваемой суммой правых частей (50) и (52). Под действием описанного выше замкнутого процесса деформации первый член в правой части (50) даст нуль, поскольку $F_{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu}^*$ держатся фиксированными, а A^μ , $A^{\mu*}$ возвращаются обратно к их исходным значениям. Правая часть (52) также даст нуль, поскольку она дает полную вариацию I_4 , а I_4 возвращается обратно к своему исходному значению. У нас остался только второй член в правой части (50), который равен выражению (51) и дает для замкнутого процесса деформации

$$DI = g \int (F^\dagger)_{\mu\nu}^* d\sigma^{\mu\nu},$$

где $d\sigma^{\mu\nu}$ — элемент двумерной поверхности, заметаемой струной. Стоящий здесь интеграл есть, согласно (8), как раз полный электрический поток, выходящий из замкнутой поверхности σ , и равен поэтому умноженному на 4π заряду e , окруженному поверхностью. Поэтому

$$DI = 4\pi ge.$$

Мы можем закручивать любую из струн вокруг любого из зарядов любое число раз, так что полная неопределен-

ность в I — это сумма

$$4\pi \sum_{ge} m_{ge} g e \quad (72)$$

по всем зарядам e и по всем полюсам g с произвольными целыми коэффициентами m_{ge} в каждом члене.

Явление неоднозначности интеграла действия встречается в механике часто. Простейший пример представляет динамическая система, состоящая из вращающегося вокруг фиксированной оси твердого тела, для которой интеграл действия равен просто моменту, умноженному на азимутальный угол, так что неопределенность в интеграле действия есть умноженный на 2π момент. Правило квантования теории Бора состоит в том, что неопределенность в интеграле действия приравнивается целому кратному \hbar . Применяя это правило к неопределенности (72), получим

$$4\pi g e = n\hbar \quad (73)$$

(где n — целое) для каждого полюса g и заряда e . Это тот же результат, что и (1), только скорость света положена равной единице.

Результат (73) можно получить и из квантовой электродинамики раздела VII без боровского правила квантования, используя то условие, что волновая функция должна быть однозначна. Перестановочные соотношения (60) показывают, что $\beta_\mu(\tau_1)$ есть умноженный на $i\hbar$ оператор функционального дифференцирования по отношению к $y_\mu(\tau_1)$, так что волновое уравнение (70) есть

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial y_\mu(\tau_1)} = g (F^\dagger)_{\mu\nu}^*(y) \frac{dy^\nu}{d\tau_1} \psi. \quad (74)$$

Это уравнение показывает, как меняется ψ , когда меняется положение струны. Если струна замедляет, перемещаясь, двумерную поверхность σ , то (74) показывает, что ψ умножается на

$$\exp \left[-ig \int (F^\dagger)_{\mu\nu}^* d\sigma^{\mu\nu} / \hbar \right], \quad (75)$$

если только $(F^\dagger)_{\mu\nu}^*$, появляющиеся здесь в различных точках подынтегрального выражения, все коммутируют. (Можно легко устроить так, чтобы аккуратно удовлетворить этому условию, в случае, когда σ лежит на плоской трехмерной пространственно-подобной поверхности S_p , за счет подходящего выбора функции γ , а в случае общей S_p отсутствие коммутативности стремится к нулю, когда

$\gamma(x) \rightarrow \delta_4(x)$, и поэтому не приводит к неправомерности выкладки.) Применим теперь использованную выше процедуру закручивания струны вокруг заряда с возвращением ее к исходному положению. Поскольку ψ однозначна, мы обязаны вернуться к ее первоначальному значению, так что множитель (75) должен быть единицей. Это требует, чтобы

$$g \int (F^\dagger)_{\mu\nu}^* d\sigma^{\mu\nu} / \hbar = 2\pi n$$

с целым n , что снова дает условие (73).

Мы приходим к тому важному выводу, что *квантование уравнений движения заряженных частиц и частиц с полюсами возможно, только если заряды и полюса суть целые кратные единичного заряда e_0 и единичного полюса g_0 , удовлетворяющих*

$$e_0 g_0 = 1/2 \hbar c. \quad (76)$$

Теория не фиксирует значений e_0 и g_0 , а дает только их произведение.

IX. Дискуссия

Настоящая работа предлагает общую теорию частиц с электрическими зарядами и магнитными полюсами во взаимодействии с электромагнитным полем. Это не законченная теория, поскольку взаимодействие частицы с ее собственным полем не трактуется удовлетворительно. Это видно из того, что в теории постоянно используется функция $\gamma(x)$, которая не определена точным образом — приведены только некоторые желательные для нее свойства. Но даже если бы была приведена удовлетворительная функция γ , не все трудности были бы разрешены, так как все еще остались бы бесконечности, появляющиеся в волновой функции при попытках разрешить волновое уравнение. Однако эти трудности появляются и в обычной электродинамике электронов без полюсов, и если их разрешение будет найдено в обычной электродинамике, то оно, вероятно, будет применимо и для более общей электродинамики с полюсами. Появление этих трудностей не представляет аргумента против существования магнитных полюсов.

Возникает вопрос, может ли элементарная частица обладать сразу и зарядом, и полюсом. Классические уравнения движения, приведенные в разделе II, можно немедленно распространить на этот случай, но гамильтонова теория

сталкивается с определенными трудностями, связанными с точной формой функции γ . Дать надежный ответ на этот вопрос не кажется возможным, пока не достигнуто удовлетворительное описание взаимодействия частицы с ее собственным полем.

Развитая в настоящей работе теория существенно симметрична по отношению к электрическим зарядам и магнитным полюсам. Есть кажущееся существенным различие в трактовке зарядов и полюсов, которое в первую очередь проявляется через введение потенциалов согласно (13). Можно было бы, однако, с равным успехом работать, поменяв роли зарядов и полюсов. Тогда появились бы струны, приписанные зарядам, и надо было бы — вместо (13) — работать с потенциалами B_μ , определенными уравнением

$$(F^\dagger)_{\mu\nu} = \frac{\partial B_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial B_\mu}{\partial x^\nu} + 4\pi \sum_e (G)_{\mu\nu}$$

с $G_{\mu\nu}$, равными нулю везде, кроме как на полосах, очерчиваемых новыми струнами. Конечным результатом оказалась бы эквивалентная квантовая электродинамика, только отнесенная к другому представлению.

Хотя с точки зрения общей теории между зарядами и полюсами есть симметрия, есть и существенное практическое различие за счет различных численных значений кванта заряда и кванта полюса. Если мы возьмем экспериментальное значение постоянной тонкой структуры

$$e_0^2 = (1/137) \hbar c,$$

то сможем вывести значение g_0 :

$$g_0^2 = (137/4) \hbar c.$$

Итак, g_0 много больше, чем e_0 . Он соответствует постоянной тонкой структуры $137/4$. Силы радиационного трения должны быть очень существенны для движения полюса с заметным ускорением.

Большое различие между численными значениями e_0 и g_0 объясняет, почему электрические заряды создаются легко, а магнитные полюса — нет. Два одноквантовых полюса противоположного знака притягивают друг друга с силой, в $(137/2)^2$ раз большей силы между двумя одноквантовыми зарядами на том же расстоянии. Поэтому должно быть очень трудно разделить полюса противоположного знака. Чтобы оценить нужную для этой цели энергию, мы могли бы предположить, что элементарные ча-

стицы с полюсами образуют существенную составную часть протонов и имеют массу μ порядка, скажем, половины массы протона. Энергию связи двух таких частиц нельзя вычислить аккуратно без более реалистической теории радиационного трения, чем существующая теперь, но из формулы Зоммерфельда для уровней энергии водорода с учетом релятивистских эффектов можно было бы ожидать, что эта энергия связи была бы порядка μc^2 или, скажем, $5 \cdot 10^8$ электрон-вольт. Следовало бы поискать частицы с полюсами в атомных процессах, в которых доступна энергия такого порядка. Они появились бы как сильнейшим образом ионизирующие частицы и отличались бы от обычных заряженных частиц тем свойством, что создаваемая ими ионизация не возрастала бы по направлению к концу их пробега, а оставалась бы примерно постоянной.

17. ФОРМЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ ¹⁾

Reviews of Modern Physics
vol. 21 (1949), pp. 392—399

FORMS OF RELATIVISTIC DYNAMICS

P.A.M. DIRAC, St. John's College, Cambridge, England

Для целей атомной теории необходимо объединить специальный принцип относительности с гамильтоновой формулировкой динамики. Это объединение ведет к появлению десяти фундаментальных величин для каждой динамической системы, а именно—полной энергии, полного импульса и \mathbf{b} -вектора, три компоненты которого равны компонентам полного момента. Обычная форма динамики выражает всё через динамические переменные в один момент времени, что приводит к особенно простым выражениям для шести из этих десяти величин, а именно—для компонент импульса и момента. Существуют другие формы релятивистских динамик, в которых другие из этих десяти особенно просты, в соответствии с различными подгруппами неоднородной группы Лоренца. Эти формы исследуются и применяются к системе взаимодействующих частиц и к электромагнитному полю.

1. Введение

Великое свершение Эйнштейна—принцип относительности—налагает условия, которым должны удовлетворять все физические законы. Оно глубоко влияет на всю физическую науку, начиная от космологии, которая имеет дело с очень большим, вплоть до учения об атоме, имеющего дело с очень малым. Общая теория относительности требует, чтобы физические законы, выраженные в криволинейных координатах в пространстве-времени, были инва-

¹⁾ Перевод с английского В. П. Павлова.

риантны относительно всех преобразований этих координат. Это автоматически привносит в физическую теорию гравитационные поля и правильно описывает влияние этих полей на физические явления.

Гравитационные поля особенно важны при рассмотрении явлений большого масштаба, как в космологии, но почти пренебрежимы в другом пределе, при изучении атома. В атомном мире отклонение пространства-времени от плоскости столь поразительно мало, что не было бы смысла принимать его во внимание в настоящее время, когда многие большие эффекты все еще не объяснены. Поэтому естественно работать с координатной системой простейшего рода, для которой определяющий метрику тензор $g^{\mu\nu}$ обладает компонентами

$$g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1, \\ g^{\mu\nu} = 0 \quad \text{для } \mu \neq \nu.$$

Специальный принцип относительности Эйнштейна приобретает теперь первостепенное значение, требуя, чтобы физические законы были бы инвариантны относительно преобразования одной такой координатной системы в другую. Преобразование такого рода называется неоднородным преобразованием Лоренца. Координаты u_μ преобразуются линейно согласно уравнениям

$$u_\mu^* = \alpha_\mu + \beta_\nu v u_\nu \quad \text{с} \quad \beta_\nu v \beta^{\nu\rho} = g^{\nu\rho}, \quad (1)$$

где α и β — постоянные.

Преобразование типа (1) может включать отражение координатной системы в трех пространственных измерениях, а может также включать и временное отражение, когда направление du_0 в пространстве-времени меняется от будущего к прошлому. Я не думаю, чтобы для физических законов было необходимо оставаться инвариантными при таких отражениях, хотя все до сих пор известные точные законы природы и обладают такой инвариантностью. Специальный принцип относительности возник из требования, чтобы законы природы были бы независимы от положения и скорости наблюдателя, а любое изменение, которое наблюдатель, сохраняя с собой свою координатную систему, может сделать в своем положении и скорости, приведет к такому преобразованию (1), которое может быть построено из бесконечно малых преобразований и не может содержать отражения. Поэтому кажется, что специальный принцип относительности будет удовлетворен, если потребовать, чтобы физические законы оставались инвариантными

относительно бесконечно малых преобразований координатной системы типа (1). Такие бесконечно малые преобразования задаются выражением

$$u_{\mu}^* = u_{\mu} + a_{\mu} + b_{\mu\nu} u_{\nu} \quad \text{с} \quad b_{\mu\nu} = -b_{\nu\mu}, \quad (2)$$

где a и b — бесконечно малые постоянные.

Второе общее требование для динамической теории было извлечено на свет открытием квантовой механики Гейзенбергом и Шредингером — это требование, чтобы уравнения движения можно было выразить в гамильтоновой форме. Оно необходимо, чтобы переход к квантовой теории был возможен. Поэтому в атомной теории мы имеем дело со столкновением (over-riding) этих двух требований. Проблема их согласования друг с другом образует предмет настоящей работы.

Все существующие теории взаимодействия элементарных частиц и полей неудовлетворительны с точки зрения одного или другого. Несовершенство вполне могло бы возникнуть из-за использования для представления атомных явлений неправильных динамических систем, т. е. неверных гамильтонианов и неверных энергий взаимодействия. *Поэтому приобретает большое значение предложение новых динамических систем и рассмотрение того, не будут ли они лучше описывать атомный мир.* При предложении новых динамических систем с самого начала сталкиваются с двумя требованиями — релятивистской инвариантности и наличия гамильтоновых уравнений движения. Настоящая статья имеет целью положить начало этой работе, заготовляя простейшие методы для одновременного удовлетворения двум требованиям.

2. Десять фундаментальных величин

Теория какой-либо динамической системы строится в терминах некоторого числа алгебраических величин, называемых динамическими переменными, каждая из которых определена по отношению к системе координат в пространстве-времени. Обычные динамические переменные — это координаты и импульсы частиц в отдельные времена и полевые величины в отдельных точках пространства-времени¹⁾, однако допустимы (и появятся ниже) и величины другого рода.

¹⁾ Ср. многовременной формализм в статье II. — *Примеч. ред.*

Чтобы динамическая теория могла быть выражена в гамильтоновой форме, необходимо, чтобы любые две динамические переменные, ξ и η , имели бы СП (скобку Пуассона) $[\xi, \eta]$, подчиняющуюся следующим законам:

$$\begin{aligned} [\xi, \eta] &= -[\eta, \xi], \\ [\xi, \eta + \zeta] &= [\xi, \eta] + [\xi, \zeta], \\ [\xi, \eta\zeta] &= [\xi, \zeta]\zeta + \eta[\xi, \zeta], \\ [[\xi, \eta], \zeta] + [[\eta, \zeta]\xi] + [[\zeta, \xi], \eta] &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Некоторое количество физических констант можно считать специальным случаем динамических переменных, которые обладают той особенностью, что их СП с чем угодно обращаются в нуль.

Динамические переменные изменяются, если изменяется система координат, относительно которой они определены, и должны совершать это таким образом, чтобы СП-соотношения между ними оставались инвариантными. Это требует, чтобы при бесконечно малом изменении координатной системы (2) каждая динамическая переменная ξ изменялась по закону

$$\xi^* = \xi + [\xi, F], \quad (4)$$

где F — бесконечно малая динамическая переменная, не зависящая от ξ и зависящая только от включающей ее динамической системы и изменения системы координат. Итак, мы приведены к тому, чтобы связать одну F с каждым бесконечно малым преобразованием координат.

Применим последовательно два бесконечно малых преобразования координат. Предположим, что первое переводит динамическую переменную ξ в ξ^* согласно

$$\xi^* = \xi + [\xi, F_1],$$

а второе переводит ξ^* в ξ^+ согласно

$$\xi^+ = \xi^* + [\xi^*, F_2] = \xi^* + [\xi, F_2]^*.$$

Оба преобразования вместе переводят ξ в ξ^+ согласно

$$\xi^+ = \xi + [\xi, F_1] + [\xi, F_2] + [[\xi, F_2], F_1]$$

с точностью до членов порядка F_1F_2 (и в пренебрежении членами порядка F_1^2 и F_2^2). Если эти два преобразования применены в обратном порядке, то они переводят ξ в ξ^{++} согласно

$$\xi^{++} = \xi + [\xi, F_2] + [\xi, F_1] + [[\xi, F_1], F_2].$$

Поэтому

$$\xi^{++} = \xi^+ + [[\xi, F_1], F_2] - [[\xi, F_2], F_1] = \xi^+ + [\xi, [F_1, F_2]]$$

с помощью первого и последнего уравнений (3). Это дает изменение динамической переменной, связанное с тем изменением координатной системы, которое является коммутатором двух предыдущих изменений. Оно имеет стандартную форму:

$$\xi^{++} = \xi^+ + [\xi^+, F]$$

с F , равной скобке Пуассона F_1 и F_2 , связанных с двумя предыдущими изменениями координат. Итак, перестановочные соотношения между различными бесконечно малыми преобразованиями координат соответствуют СП-соотношениям между связанными с ними F .

Связанная с преобразованием (2) F должна линейно зависеть от определяющих преобразование бесконечно малых чисел a_μ и $b_{\mu\nu}$. Поэтому мы можем положить

$$F = -P^\mu a_\mu + \frac{1}{2} M^{\mu\nu} b_{\mu\nu}, \quad (5)$$

где P^μ и $M^{\mu\nu}$ — конечные динамические переменные, не зависящие от преобразования координат.

Десять величин P_μ , $M_{\mu\nu}$ характерны для динамической системы. Они будут именоваться десятью *фундаментальными величинами*. Они устанавливаются, как все динамические переменные затрагиваются такими изменениями координатной системы, какие встречаются в специальной теории относительности. Каждая из них связана с некоторым типом бесконечно малого преобразования из неоднородной группы Лоренца. Семь из них имеют простую физическую интерпретацию, а именно: P_0 — это полная энергия системы, P_r ($r=1, 2, 3$) — ее полный импульс, а M_{rs} — полный момент относительно начала. Оставшиеся три M_{r0} не соответствуют какой-либо столь же привычной физической величине, однако в равной мере существенны в общей динамической схеме.

Из перестановочных соотношений между отдельными бесконечно малыми преобразованиями координатной системы мы сразу получим СП-соотношения между десятью фундаментальными величинами:

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0, \\ [M_{\mu\nu}, P_\rho] &= -g_{\mu\rho}P_\nu + g_{\nu\rho}P_\mu, \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= -g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\rho\nu} + g_{\nu\sigma}M_{\rho\mu}. \end{aligned} \quad (6)$$

Чтобы построить теорию некоторой динамической системы надо получить удовлетворяющие этим СП соотношениям выражения для десяти фундаментальных величин. *Проблема нахождения новой динамической системы сводится к проблеме нахождения нового решения этих уравнений.*

Элементарное решение строится по следующей схеме. Возьмем четыре координаты q_μ точки в пространстве-времени за динамические координаты, и обозначим через p_μ их сопряженные импульсы, так что

$$[q_\mu, q_\nu] = 0, \quad [p_\mu, q_\nu] = 0, \quad [p_\mu, p_\nu] = g_{\mu\nu}.$$

Эти q будут преобразовываться при бесконечно малом преобразовании координатной системы так же, как и u в (2). Это ведет к

$$P_\mu = p_\mu, \quad M_{\mu\nu} = q_\mu p_\nu - q_\nu p_\mu \quad (7)$$

и обеспечивает решение СП-соотношений (6). Решение (7) не представляется обладающим практическим значением, однако, как покажут следующие три раздела, оно может быть использовано в качестве основы для получения других решений, обладающих практической важностью.

Предыдущее обсуждение требований на релятивистскую динамическую теорию можно несколько обобщить. Мы можем работать с динамическими переменными, связанными одним или несколькими соотношениями для всех тех состояний движения, которые реализуются физически. Такие соотношения называются *дополнительными условиями*. Будем записывать их в виде

$$A \approx 0, \quad (8)$$

чтобы отличать их от динамических уравнений. Они менее сильны, чем динамические уравнения, так как из динамического уравнения можно получить другое, взяв СП от обеих его сторон с любой динамической переменной, в то время как с дополнительным условием этого, вообще говоря, делать нельзя. Более слабое предположение, что из двух дополнительных условий $A \approx 0$ и $B \approx 0$ можно вывести третье

$$[A, B] \approx 0, \quad (9)$$

будет, однако, сделано.

Дополнительное условие должно оставаться дополнительным условием после любого изменения координатной системы. Это дает нам право заключить из (8), что

$$[P_\mu, A] \approx 0, \quad [M_{\mu\nu}, A] \approx 0. \quad (10)$$

Динамическая переменная обладает физическим смыслом, только если ее СП с любым дополнительным условием снова дает дополнительное условие, т. е. ее СП с A из (8) должна в дополнительном смысле исчезать. Такая динамическая переменная будет называться *физической переменной*. СП двух физических переменных есть снова физическая переменная. Уравнения (10) показывает, что десять фундаментальных величин являются физическими переменными.

Только одни физические переменные являются действительно существенными. Можно было бы совсем исключить нефизические переменные из теории, и, значит, превратить дополнительные условия в динамические уравнения. Исключение, однако, может оказаться неуклюжим и может исказить некоторые свойства симметрии схемы уравнений, так что желательно сохранить возможность дополнительных условий в общей теории.

3. Мгновенная форма

Для встречающихся на практике динамических систем десять фундаментальных величин обычно таковы, что некоторые из них особенно просты, в то время как остальные сложны. Сложные будут называться гамильтонианами. Они в совокупности играют роль единственного гамильтониана нерелятивистской динамики. Так как СП двух простых величин является величиной простой, то простые из числа десяти фундаментальных величин должны быть связаны с некоторой подгруппой неоднородной группы Лоренца.

В обычной форме динамики работают с динамическими переменными, относящимися к физическим условиям в некоторый момент времени (мгновенье), т. е. к координатам и импульсам частиц в это мгновенье. В релятивистской четырехмерной картине мгновенье—это плоская трехмерная поверхность, содержащая лишь направления, лежащие вне светового конуса. Простейшее отнесенное к координатной системе u мгновенье задается уравнением

$$u_0 = 0. \quad (11)$$

В результате работы с динамическими переменными, относящимися к физическим условиям в это мгновенье, должны стать особенно простыми те из фундаментальных величин, которые связаны с преобразованиями координат, оставляющими мгновенье инвариантным, а именно, $P_1, P_2, P_3, M_{23}, M_{31}, M_{12}$. Остальные, $P_0, M_{10}, M_{20}, M_{30}$ будут,

вообще говоря, сложными и будут гамильтонианами. Мы получим таким образом форму динамики, связанную с подгруппой неоднородной группы Лоренца, которая оставляет мгновение инвариантным, и которая может быть подходяще названа *мгновенной формой*.

Возьмем в качестве примера одну единственную частицу. В этом случае десять фундаментальных величин хорошо известны, однако мы получим их тут заново, чтобы проиллюстрировать метод, который может быть использован и в других формах динамики.

В качестве динамических переменных выберем три координаты частицы в мгновение (11). Называя эти координаты q_r , мы можем основать нашу работу на схеме (7) с дополнительным условием

$$q_0 \approx 0. \quad (12)$$

С этим условием p_0 не имеет более смысла. Мы должны поэтому так изменить заданные (7) выражения для десяти фундаментальных величин, чтобы исключить из них p_0 без нарушения СП-соотношений (6).

Добавим к выражениям для десяти фундаментальных величин члены, кратные $p^\sigma p_\sigma - m^2$, где m — константа, т. е. положим

$$P_\mu = p_\mu + \lambda_\mu (p^\sigma p_\sigma - m^2), \quad M_{\mu\nu} = q_\mu p_\nu - q_\nu p_\mu + \lambda_{\mu\nu} (p^\sigma p_\sigma - m^2), \quad (13)$$

где

$$\lambda_{\mu\nu} = -\lambda_{\nu\mu}$$

и коэффициенты λ являются функциями q и p , которые не могут стать бесконечно большими, если положить $p^\sigma p_\sigma - m^2 = 0$ с $p_0 > 0$. Поскольку $p^\sigma p_\sigma - m^2$ обладает нулевой СП со всеми выражениями (7), то измененные выражения (13) должны по-прежнему удовлетворять СП-соотношениям (6) с точностью до кратных от $p^\sigma p_\sigma - m^2$, при любом выборе λ . Если мы теперь выберем λ так, чтобы сделать P_μ и $M_{\mu\nu}$ в (13) не зависящими от p_0 , то СП-соотношения (6) должны будут удовлетворяться с точностью до членов, не зависящих от p_0 , равно как и кратных $p^\sigma p_\sigma - m^2$. Такие члены должны исчезнуть, так что на этом пути мы получаем решение нашей задачи.

Коэффициенты λ имеют значения

$$\begin{aligned} \lambda_r &= 0, & \lambda_0 &= \frac{-1}{p_0 + \sqrt{p_s p_s + m^2}}, \\ \lambda_{sr} &= 0, & \lambda_{r0} &= -\frac{-1}{p_0 + \sqrt{p_s p_s + m^2}}, \end{aligned} \quad (14)$$

и формулы (13) приобретают с помощью (12) вид

$$P_r = p_r, \quad M_{rs} = q_r p_s - q_s p_r, \quad (15)$$

$$P_0 = V \sqrt{p_s p_s + m^2}, \quad M_{r0} = q_r V \sqrt{p_s p_s + m^2}. \quad (16)$$

Уравнения (15) и (16) дают нам все десять фундаментальных величин для частицы с массой покоя m . Величины, задаваемые (15), являются простыми (simple), задаваемые (16), — гамильтонианами.

Для динамической системы, составленной из отдельных частиц, P_r и M_{rs} будут просто суммами их значений для частиц в отдельности,

$$P_r = \sum p_r, \quad M_{rs} = \sum (q_r p_s - q_s p_r). \quad (17)$$

Гамильтонианы P_0 , M_{r0} будут состоять из суммы их значений для отдельных частиц плюс члены взаимодействия,

$$P_0 = \sum V \sqrt{p_s p_s + m^2} + V, \quad M_{r0} = \sum q_r V \sqrt{p_s p_s + m^2} + V_r. \quad (18)$$

Функции V должны быть выбраны так, чтобы P_0 и M_{r0} удовлетворили бы всем СП-соотношениям (6), в которых они присутствуют.

Некоторые из этих соотношений линейны V и легко удовлетворимы. СП-соотношения для $[M_{r1}, P_0]$ и $[M_{rs}, M_{t0}]$ будут выполнены, если V — трехмерный (в пространстве u_1, u_2, u_3) скаляр, а V_r — трехмерный вектор. СП-соотношения для $[P_r, P_0]$ будут выполнены, если V не зависит от положения начала в трехмерном пространстве u_1, u_2, u_3 . СП-соотношения для $[M_{r0}, P_s]$ будут выполнены, если

$$V_r = q_r V + V'_r, \quad (19)$$

где q_r — координаты одной из частиц, а V'_r не зависят от положения начала координат в трехмерном пространстве.

Оставшиеся условия на V являются квадратичными, содержащими $[V, V_r]$ или $[V_r, V_s]$. Эти соотношения не могут быть легко удовлетворены и представляют действительную трудность в задаче построения теории релятивистской динамической системы в мгновенной форме.

4. Точечная форма

Можно построить динамическую теорию, оперирующую с динамическими переменными, относящимися к физическим условиям на трехмерной поверхности, отличной от мгновенья. Поверхность должна удовлетворять тому условию, чтобы мировая линия каждой частицы встречала ее, так

как иначе частица не могла бы описываться переменными на поверхности, и, предпочтительно, встречала бы ее только один раз—ради единственности.

Чтобы получить теорию простой формы, надо было бы выбрать поверхность так, чтобы она оставалась инвариантной при некоторой подгруппе неоднородной группы Лоренца. Возможной подгруппой будет группа вращений относительно некоторой точки, скажем, начала координат $u_\mu = 0$. За поверхность может быть тогда выбрана пола гиперboloида

$$u^p u_p = \kappa^2, \quad u_0 > 0, \quad (20)$$

где κ —константа. Фундаментальные величины, связанные с бесконечно малыми преобразованиями подгруппы, именно $M_{\mu\nu}$, будут тогда специально просты, в то время как другие, именно P_μ , будут вообще говоря сложными и будут гамильтонианами. Так получается новая форма динамики, которую можно назвать *точечной формой*, поскольку она характеризуется тем, что связана с подгруппой, которая оставляет инвариантной точку.

Чтобы проиллюстрировать новую форму, возьмем снова пример единственной частицы. Динамические координаты должны установить место, где мировая линия частицы встречает гиперboloид (20). Пусть четыре координаты этой точки в системе координат u будут q_μ . Только три из них независимы, но вместо того, чтобы исключить одну из них, удобнее работать со всеми четырьмя и ввести дополнительное условие

$$q_\rho q_\rho \approx \kappa^2. \quad (21)$$

Тогда необходимо, чтобы десять фундаментальных величин—и вообще все физические переменные—имели нулевую СП с $q^\rho q_\rho$. Условием того будет, чтобы они содержали импульсы p только в комбинации $q_\mu p_\nu - q_\nu p_\mu$.

Десять фундаментальных величин можно получить методом, параллельным методу предыдущего раздела, с дополнительным условием (21) на месте условия (12). Мы опять примем анзац (13), и теперь выберем λ так, чтобы сделать нулевыми СП правых частей с $q^\rho q_\rho$. Получающиеся выражения для десяти фундаментальных величин будут снова удовлетворять СП-соотношениям (6), в чем можно убедиться с помощью рассуждений, аналогичных проведенным в предыдущем разделе.

Сразу находим

$$\lambda_{\mu\nu} = 0.$$

Чтобы получить λ_μ , проще не непосредственно подстраивать P_μ , стараясь обратить его СП с $q^0 q_0$ в нуль, а добиться, чтобы нулевую СП с $q^0 q_0$ имели $q_\mu P_\nu - q_\nu P_\mu$ и $P^\mu P_\mu$. Тогда

$$q_\mu P_\nu - q_\nu P_\mu = q_\mu p_\nu - q_\nu p_\mu + (q_r \lambda_\nu - q_\nu \lambda_\mu) (p^\sigma p_\sigma - m^2),$$

так что должно быть

$$q_\mu \lambda_\nu - q_\nu \lambda_\mu = 0$$

и, следовательно,

$$\lambda_\mu = q_\mu B,$$

где B — некоторая динамическая переменная, не зависящая от μ . Далее,

$$\begin{aligned} P^\mu P_\mu &= \{p^\mu + q^\mu B (p^\sigma p_\sigma - m^2)\} \{p_\mu + q_\mu B (p^0 p_0 - m^2)\} = \\ &= m^2 + \{1 + 2p^\mu q_\mu B + q^\mu q_\mu B^2 (p^\sigma p_\sigma - m^2)\} (p^0 p_0 - m^2). \end{aligned}$$

Чтобы $P^\mu P_\mu$ имело нулевую СП с $q^0 q_0$, мы должны положить

$$1 + 2p^\mu q_\mu B + q^\mu q_\mu B^2 (p^\sigma p_\sigma - m^2) = 0,$$

так что

$$B (p^\sigma p_\sigma - m^2) = \frac{1}{q^0 q_0} \left\{ \sqrt{(p^\nu q_\nu)^2 - q^\lambda q_\lambda (p^\sigma p_\sigma - m^2)} - p^\nu q_\nu \right\}.$$

Правая часть здесь стремится к нулю, как $p^\sigma p_\sigma - m^2 \rightarrow 0$, так что она кратна $p^\sigma p_\sigma - m^2$, как оно и должно было быть. Мы получаем теперь окончательно:

$$P_\mu = p_\mu + \frac{1}{\kappa^2} q_\mu \left\{ \sqrt{(p^\nu q_\nu)^2 - \kappa^2 (p^\sigma p_\sigma - m^2)} - p^\nu q_\nu \right\}, \quad (22)$$

$$M_{\mu\nu} = q_\mu p_\nu - q_\nu p_\mu,$$

где выражение для P_μ упрощено с помощью (21).

Позволительно выбрать $\kappa = 0$ и получить таким образом световой конус вместо гиперболоида. Выражение для B становится тогда намного проще и дает

$$P_\mu = p_\mu - \frac{q_\mu (p^\sigma p_\sigma - m^2)}{2p^\nu q_\nu} \quad (23)$$

вместо первого из выражений (22).

Для динамической системы, составленной из отдельных частиц, $M_{\mu\nu}$ будет просто суммой их значений для частиц в отдельности:

$$M_{\mu\nu} = \sum (q_\mu p_\nu - q_\nu p_\mu). \quad (24)$$

Гамильтонианы P_μ будут суммой их значений для отдельных частиц плюс члены взаимодействия:

$$P_\mu = \sum \{p_\mu + q_\mu B (p^\sigma p_\sigma - m^2)\} + V_\mu. \quad (25)$$

Члены взаимодействия V_μ должны быть выбраны так, чтобы P_μ удовлетворяли правильным СП-соотношениям. Соотношения для $[M_{\mu\nu}, P_\rho]$ будут выполнены, если V_μ суть компоненты 4-вектора. Оставшиеся соотношения, которые требуют, чтобы P_μ имели нулевые СП друг с другом, ведут к квадратичным условиям для V_μ . Они вызывают действительную трудность в задаче построения теории релятивистской динамической системы в точечной форме.

5. Фронтальная форма

Рассмотрим трехмерную поверхность в пространстве-времени, образованную фронтом плоской волны, распространяющейся со скоростью света. Ради краткости такая поверхность будет называться *фронтом*. Пример фронта дается уравнением

$$u_0 - u_3 = 0. \quad (26)$$

Мы можем построить динамическую теорию, в которой динамические переменные относятся к физическим условиям на фронте. Это сделает особенно простыми те из фундаментальных величин, которые связаны с бесконечно малыми преобразованиями координат, оставляющими фронт инвариантным, и даст третью форму динамики, которая может быть названа *фронтальной формой*.

Если A_μ — некоторый 4-вектор, то положим

$$A_0 + A_3 = A_+, \quad A_0 - A_3 = A_-.$$

Мы получим удобные обозначения, свободно используя индексы «+» и «-» в качестве тензорных индексов вместе с индексами 1 и 2. Их можно поднимать с помощью

$$g^{++} = g^{--} = 0, \quad g^{+-} = 1/2, \quad g^{i+} = g^{i-} = 0 \quad \text{для } i = 1, 2,$$

что можно проверить, заметив, что g приводят к правильной величине для $g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu$, если при суммировании μ и ν пробегает значения 1, 2, +, -.

Уравнение фронта (26) приобретает в этих обозначениях вид

$$u_- = 0.$$

Фундаментальные величины $P_1, P_2, P_-, M_{12}, M_{+-}, M_{1-}$ и M_{2-} связаны с преобразованиями координат, которые

оставляют фронт инвариантным, и будут особенно простыми. Оставшиеся P_+ , M_{1+} и M_{2+} будут, вообще говоря, сложными и будут гамильтонианами.

Разработаем снова пример единственной частицы. Динамическими переменными будут теперь q_1 , q_2 и q_+ . Снова примем анзац (13) и присоединим к нему уравнение $q_- = 0$. Теперь мы должны выбрать λ так, чтобы сделать правые части (13) не зависящими от p_+ . Тогда получающиеся для десяти фундаментальных величин выражения будут снова удовлетворять требуемым СП-соотношениям.

Найдем

$$\lambda_+ = -1/p_-, \quad \lambda_{i+} = -q_i/p_-,$$

остальные λ исчезают. Таким образом,

$$P_i = p_i, \quad P_- = p_-, \\ M_{12} = q_1 p_2 - q_2 p_1, \quad M_{i-} = q_i p_-, \quad M_{+-} = q_+ p_-, \quad (27)$$

$$P_+ = \frac{p_1^2 + p_2^2 + m^2}{p_-}, \quad M_{i+} = \frac{q_i (p_1^2 + p_2^2 + m^2)}{p_-} + q_+ p_i. \quad (28)$$

Уравнения (27) дают простые фундаментальные величины. Уравнения (28) дают гамильтонианы.

Для динамической системы, составленной из отдельных частиц, P_i , P_- , M_{12} , M_{+-} , M_{i-} будут просто суммой их значений для частиц в отдельности. Гамильтонианы P_+ , M_{i+} будут суммой их значений для отдельных частиц плюс члены взаимодействия,

$$P_+ = \sum \frac{p_1^2 + p_2^2 + m^2}{p_-} + V, \quad M_{i+} = \sum \frac{q_i (p_1^2 + p_2^2 + m^2)}{p} + V_i. \quad (29)$$

Функции V должны удовлетворять определенным условиям, чтобы сделать гамильтонианы удовлетворяющими правильным СП-соотношениям.

Как и раньше, некоторые из этих соотношений линейны, а некоторые — квадратичны. Линейные условия на V требуют, чтобы она оставалась инвариантной относительно всех преобразований координат u_1 , u_2 , u_+ на фронте, за исключением таких, при которых du_+ умножается на число, а при этих последних V должна получать тот же множитель. Линейные условия на V_i требуют, чтобы они имели вид

$$V_i = q_i V + V_i^*, \quad (30)$$

где q_i — координаты 1 и 2 какой-либо частицы, а V_i^* обладают теми же свойствами, что и V , относительно всех преобразований трех координат на фронте, исключая свя-

занные с M_{12} вращения, относительно которых V_i ведет себя как двумерный вектор. Квадратичные условия для функций V не могут быть легко удовлетворены и порождают действительные трудности в построении теории релятивистской динамической системы во фронтальной форме.

6. Электромагнитное поле

Чтобы ввести динамическую теорию полей в рамки представлений, которые обсуждались в трех предыдущих разделах, можно взять в качестве динамических переменных трижды бесконечное число полевых величин во всех точках мгновения, гиперboloида или фронта и использовать их вместо конечного числа переменных в теории частиц. Из них надо построить десять фундаментальных величин P_μ , $P_{\mu\nu}$, удовлетворяющих тем же СП-соотношениям, что и ранее.

Для поля, которое допускает волны, движущиеся со скоростью света, с точечной формой теории возникает трудность из-за того, что может существовать волновой пакет, вообще не встречающий гиперboloида (20). Таким образом физические условия на гиперboloиде не могут полностью описать состояния поля. Приходится, кроме полевых величин на гиперboloиде, вводить еще и некоторые особые динамические переменные. Похожие трудности, в менее серьезной форме, возникают и во фронтальной форме теории. Волны, движущиеся со скоростью света точно в направлении фронта, нельзя описать физическими условиями на фронте, и для обращения с ними приходится вводить некоторые особые переменные.

Альтернативный метод построения динамической теории полей получается при работе с динамическими переменными, которые описывают фурье-компоненты поля. У этого метода есть ряд преимуществ. Он избавляет от трудностей с дополнительными переменными и обычно лучше подходит для прямой физической интерпретации. Он приводит к выражениям для десяти фундаментальных величин, которые могут быть использованы со всеми тремя формами. Для поля самого по себе тогда между тремя формами нет разницы, но различие, конечно, появляется, если поле взаимодействует с чем-либо. Динамические переменные поля надо тогда понимать как фурье-компоненты, которые получило бы поле после выключения взаимодействия, если бы взаимодействие было вдруг выключено в мгновение, на гиперboloиде или на фронте.

Возьмем в качестве примера электромагнитное поле, сперва без всякого взаимодействия. Мы можем работать с четырьмя потенциалами $A_\lambda(u)$, удовлетворяющими дополнительному условию

$$\frac{\partial A_\lambda(u)}{\partial u_\lambda} \approx 0. \quad (31)$$

Их фурье-разложение будет иметь вид

$$A_\lambda(u) = \int \left\{ A_{k\lambda} e^{ik^\mu u_\mu} + A_{k\lambda}^+ e^{-ik^\mu u_\mu} \right\} \frac{d^3k}{k_0}, \quad (32)$$

с

$$k_0 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}, \quad d^3k = dk_1 dk_2 dk_3.$$

Введенный в (32) множитель $1/k_0$ приводит к более простому закону преобразования для коэффициентов Фурье $A_{k\lambda}$, поскольку дифференциальный элемент d^3k/k_0 лоренц-инвариантен. Мы примем теперь $A_{k\lambda}$ и $A_{k\lambda}^+$ за динамические переменные.

При преобразовании координат (2) потенциал $A_\lambda(u)$ в некоторой точке u изменяется в потенциал в точке с теми же самыми значениями u в новой координатной системе, т. е. в точке с координатами $u_\mu - a_\mu - b_\mu{}^\nu u_\nu$ в первоначальной координатной системе. Это вызывает изменение $A_\lambda(u)$ на величину

$$-(a_\mu + b_\mu{}^\nu u_\nu) \frac{\partial A_\lambda}{\partial u_\mu}.$$

Есть еще и дальнейшее изменение, на величину $b_\lambda{}^\nu A_\nu$, обязанное изменению в направлении осей. Итак, из (4) и (5)

$$\begin{aligned} [A_\lambda(u), -P^\mu a_\mu + \frac{1}{2} M^{\mu\nu} b_{\mu\nu}] &= A_\lambda(u)^* - A_\lambda(u) = \\ &= -(a_\mu + b_\mu{}^\nu u_\nu) \frac{\partial A_\lambda}{\partial u_\mu} + b_\lambda{}^\nu A_\nu \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$[A_\lambda(u), P^\mu] = \frac{\partial A_\lambda}{\partial u_\mu}, \quad (33)$$

$$[A_\lambda(u), M_{\mu\nu}] = u_\mu \frac{\partial A_\lambda}{\partial u^\nu} - u_\nu \frac{\partial A_\lambda}{\partial u^\mu} + g_{\lambda\mu} A_\nu - g_{\lambda\nu} A_\mu.$$

Беря теперь фурье-компоненты с (32), получим

$$\begin{aligned} [A_{k\lambda}, P_\mu] &= ik_\mu A_{k\lambda}, \\ [A_{k\lambda}, M_{\mu\nu}] &= \left(k_\mu \frac{\partial}{\partial k^\nu} - k_\nu \frac{\partial}{\partial k^\mu} \right) A_{k\lambda} + g_{\lambda\mu} A_{k\nu} - g_{\lambda\nu} A_{k\mu}, \end{aligned} \quad (34)$$

где $A_{k\lambda}$, в целях применения к ним дифференциального

оператора $k_\mu \frac{\partial}{\partial k_\nu} - k_\nu \frac{\partial}{\partial k_\mu}$, можно рассматривать как функцию от четырех независимых k .

Теория Максвелла дает для энергии и импульса электромагнитного поля

$$P_\mu = -4\pi^2 \int k_r A_k^\lambda A_{k\lambda}^\dagger \frac{d^3k}{k_0}, \quad (35)$$

где знак « \rightarrow » нужен для того, чтобы поперечные компоненты вносили положительную энергию. Чтобы это выражение согласовывалось с первым из уравнений (34), необходимо иметь СП-соотношения:

$$\begin{aligned} [A_{k\lambda}, A_{k'\mu}] &= 0, \\ [A_{k\lambda}, A_{k'\mu}^\dagger] &= -\frac{ig_{\lambda\mu}}{4\pi^2} k_0 \delta(k_1 - k'_1) \delta(k_2 - k'_2) \delta(k_3 - k'_3). \end{aligned} \quad (36)$$

Второе из уравнений (34) ведет тогда к

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu} = 4\pi^2 i \int \left\{ A_{k\lambda}^\dagger \left(k_\mu \frac{\partial}{\partial k_\nu} - k_\nu \frac{\partial}{\partial k_\mu} \right) A_k^\lambda + A_{k\mu}^\dagger A_{k\nu} - A_{k\nu}^\dagger A_{k\mu} \right\} \times \\ \times \frac{d^3k}{k_0}. \end{aligned} \quad (37)$$

Выражения (35) и (37) определяют десять фундаментальных величин.

Для электромагнитного поля, взаимодействующего с заряженными частицами, десять фундаментальных величин будут суммами их значений для одного поля, задаваемыми (35) и (37), и приведенных в одном из трех предыдущих разделов их значений для частиц, с членами взаимодействия, включающими наряду с переменными частиц и переменные поля $A_{k\lambda}$ и $A_{k\lambda}^\dagger$. Обычно принимают, что между частицами нет прямого взаимодействия, а есть только взаимодействие между каждой частицей и полем. Десять фундаментальных величин принимают тогда форму

$$P_\mu = P_\mu^F + \sum_a P_\mu^a, \quad M_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}^F + \sum_a M_{\mu\nu}^a, \quad (38)$$

где P_μ^F и $M_{\mu\nu}^F$ — вклады чистого поля, даваемые (35) и (37), а P_μ^a и $M_{\mu\nu}^a$ — вклады a -й частицы, состоящие из членов, относящихся к самой частице, и членов взаимодействия. Для точечного заряда члены взаимодействия включают переменные поля только через значение $A_\lambda(q)$ и его производные в той точке q , где мировая линия частицы встречает мгновение, гиперболоид или фронт. Выражения для P_μ^a и $M_{\mu\nu}^a$ для этого случая могут быть

легко получены с помощью обобщения метода трех предыдущих разделов следующих образом.

Предположим для простоты, что есть только одна частица. Мы должны заменить (13) на

$$\begin{aligned} P_\mu &= P_\mu^F + p_\mu + \lambda_\mu (\pi^\sigma \pi_\sigma - m^2), \\ M_{\mu\nu} &= M_{\mu\nu}^F + q_\mu p_\nu - q_\nu p_\mu + \lambda_{\mu\nu} (\pi^\sigma \pi_\sigma - m^2), \end{aligned} \quad (39)$$

где $\pi_\sigma = p_\sigma - eA_\sigma(q)$, а P_μ^F и $M_{\mu\nu}^F$ — правые части (35) и (37). Из (33) имеем

$$[A_\lambda(q), P_\mu^F + p_\mu] = 0,$$

$[A_\lambda(q), M_{\mu\nu}^F + q_\mu p_\nu - q_\nu p_\mu] = g_{\lambda\mu} A_\nu(q) - g_{\lambda\nu} A_\mu(q)$
и, следовательно,

$$[\pi_\lambda, P_\mu^F + p_\mu] = 0,$$

$$[\pi_\lambda, M_{\mu\nu}^F + q_\mu p_\nu - q_\nu p_\mu] = g_{\lambda\mu} \pi_\nu - g_{\lambda\nu} \pi_\mu.$$

Отсюда вытекает, что $\pi^\sigma \pi_\sigma$ обладает нулевой СП с каждой из величин $P_\mu^F + p_\mu$ и $M_{\mu\nu}^F + q_\mu p_\nu - q_\nu p_\mu$. Теперь, с помощью тех же самых аргументов, что и в случае отсутствия поля, можно заключить, что если λ в (39) выбраны так, чтобы P_μ , $M_{\mu\nu}$ имели нулевые СП с q_0 , $q^0 q_0$ или q_- , то все СП-соотношения (6) удовлетворятся. Такой выбор λ вместе с одним из уравнений $q_0 = 0$, $q^0 q_0 \approx k^2$ или $q_- = 0$ предоставляет нам десять фундаментальных величин для заряженной частицы, взаимодействующей с полем в мгновенной, точечной или фронтальной форме, соответственно. Дополнительное условие (31) должно быть изменено, если присутствуют заряды.

В качестве иллюстрации рассмотрим точечную форму. В этом случае мы сразу получаем $\lambda_{\mu\nu} = 0$. Величины λ_μ удобно получить, устроивши, чтобы комбинации $q_\mu (P_\nu - P_\nu^F) - q_\nu (P_\mu - P_\mu^F)$ и $\{P^\mu - P^{\mu F} - eA^\mu(q)\} \times \{P_\mu - P_\mu^F - eA_\mu(q)\}$ имели нулевые СП с $q^0 q_0$. Первое условие дает $\lambda_\mu = q_\mu B$. Второе дает тогда

$$1 + 2\pi^\mu q_\mu B + q^\mu q_\mu B^2 (\pi^\sigma \pi_\sigma - m^2) = 0.$$

Поэтому окончательно

$$\begin{aligned} P_\mu &= P_\mu^F + p_\mu + q_\mu \frac{\sqrt{(\pi^\nu q_\nu)^2 - \kappa^2 (\pi^\sigma \pi_\sigma - m^2)}}{\kappa^2} - \pi^\nu q_\nu, \\ M_{\mu\nu} &= M_{\mu\nu}^F + q_\mu p_\nu - q_\nu p_\mu. \end{aligned} \quad (40)$$

Изложенная теория точечного заряда подвержена той обычной трудности, что в решениях уравнений движения возникнут бесконечности из-за бесконечной электромагнитной энергии точечного заряда. Преимущество настоя-

щей трактовки перед обычной трактовкой электромагнитных уравнений состоит в том, что она предоставляет более простые возможности для отступления от модели точечного заряда для элементарных частиц.

7. Обсуждение

Были даны три формы, в которые может быть вложена релятивистская динамическая теория. Для частиц без взаимодействия возможна любая из трех. Для частиц со взаимодействием может оказаться, что все три по-прежнему возможны, или может оказаться, что возможна только одна, в зависимости от рода взаимодействия. Когда хотят строить новый род взаимодействия между частицами, чтобы исправить атомную теорию, то сначала надо избрать одну из трех форм, а затем стараться найти члены взаимодействия V или непосредственно найти гамильтонианы, удовлетворяющие требуемым СП-соотношениям. Возникает вопрос, какую форму лучше всего взять для этой цели.

Мгновенная форма обладает тем преимуществом, что она наиболее привычна для всякого человека, однако я не думаю, чтобы она была бы внутренне лучшей по этой причине. Четыре гамильтониана P_0 , M_{r0} образуют слишком неуклюжую комбинацию.

Точечная форма обладает тем преимуществом, что в ней происходит очень чистое отделение тех из фундаментальных величин, которые просты, от тех, которые суть гамильтонианы. Первые являются компонентами 6-вектора, вторые — компонентами 4-вектора. Поэтому четыре гамильтониана можно легко рассматривать как единое целое. Все уравнения в этой форме можно изящно и сжато выразить в четырехмерных тензорных обозначениях.

Фронтальная форма обладает тем преимуществом, что она требует только трех гамильтонианов, вместо четырех в других формах. Это делает ее математически наиболее интересной формой, и делает задачу отыскания гамильтонианов существенно более простой. Фронтальная форма обладает еще и тем преимуществом, что в гамильтонианах (28) нет квадратного корня, что означает возможность избавиться от отрицательных энергий частиц подходящим выбором значений динамических переменных на фронте, не делая специального соглашения относительно знака квадратного корня. Поэтому исключение отрицательных энергий в квантовой теории может оказаться более про-

стым. Это преимущество появляется также и в точечной форме теории с $\kappa=0$, когда в (23) нет квадратного корня.

Решающего аргумента в пользу одной или другой из форм нет. Даже если можно было бы решить, что одна из них наиболее удобна, она не была бы обязана быть той, которую выбрала природа, в случае, если только одна из них возможна для атомных систем. Поэтому надо разрабатывать дальше все три формы.

Обсужденные в этой статье условия для релятивистской динамической системы являются необходимыми, но не достаточными. Необходимо некоторое дополнительное условие, чтобы обеспечить, что взаимодействие между двумя физическими объектами становится малым, если эти объекты оказываются далеко друг от друга. Неясно, как можно сформулировать это условие математически. Существующие атомные теории включают предположение о локализуемости, которое достаточно, но, весьма вероятно, слишком строго. Это допущение требует, чтобы теория была построена из динамических переменных, каждая из которых локализована в некоторой точке пространства-времени, так что две переменные, локализованные в двух точках, лежащих каждая вне светового конуса другой обладают нулевой СП. Адекватным может оказаться менее решительное допущение, что существует фундаментальная длина λ , такая, что СП двух динамических переменных должны исчезать, если они локализованы в двух точках, отделенных пространственно подобным и большим λ интервалом, но не должна, если интервал меньше λ .

Я еще надеюсь вернуться к переходу к квантовой теории в другом месте.

Canadian Journal of Mathematics
vol. 2, No. 2 (1950), pp. 129—148.

GENERALIZED HAMILTONIAN DYNAMICS²⁾

P. A. M. DIRAC St. John's College, Cambridge

§ 1. Введение

Уравнениям динамики придал общий вид Лагранж, записавший их в терминах набора обобщенных координат и скоростей. Альтернативный общий вид в терминах координат и импульсов позднее был дан Гамильтоном. Рассмотрим сравнительные достоинства этих двух форм.

В лагранжевой форме очень легко удовлетворить требованиям специальной теории относительности, просто взяв лоренц-инвариантным действие, т. е. интеграл лагранжиана по времени. Так просто сделать релятивистской гамильтонову форму нельзя.

При построении квантовой теории следует исходить из гамильтоновой формы. Имеются прочно укоренившиеся правила перехода от гамильтоновой динамики к квантовой динамике путем превращения координат и импульсов в линейные операторы. В простых случаях эти правила приводят к однозначным результатам, и хотя в сложных примерах без неоднозначностей не обходится, практическая пригодность правил установлена.

Таким образом, в настоящее время каждая из форм имеет собственную ценность, и пользоваться следует обеими. Обе формы тесно связаны. Исходя из любого лагранжиана можно ввести импульсы, и в случае, когда импульсы суть

¹⁾ Перевод с английского В. П. Павлова.

²⁾ Эта работа основана на первой половине курса лекций, прочитанного на Канадском математическом семинаре в Ванкувере в августе 1949 г.

независимые функции скоростей, можно получить гамильтониан. Настоящая статья посвящена построению более общей теории, применимой и в ситуации, когда импульсы не являются независимыми функциями скоростей. Получена более общая форма гамильтоновой динамики, которую по-прежнему можно использовать для квантования и которая оказывается специально приспособленной для релятивистского описания динамических процессов.

§ 2. Сильные и слабые уравнения

Рассмотрим динамическую систему с N степенями свободы, описываемую обобщенными координатами q_n ($n = 1, 2, \dots, N$) и скоростями dq_n/dt или \dot{q}_n . Возьмем лагранжиан L , который пока может быть произвольной функцией координат и скоростей

$$L \equiv L(q, \dot{q}). \quad (1)$$

Определим импульсы соотношением

$$p_n = \partial L / \partial \dot{q}_n. \quad (2)$$

Для развития теории введем вариационную процедуру, варьируя каждую из величин q_n , \dot{q}_n , p_n независимо на малую величину δq_n , $\delta \dot{q}_n$, δp_n порядка ε и работая с точностью до ε . В результате такой вариации уравнение (2) нарушится, так как его левая часть будет отлична от правой на величину порядка ε . Теперь нам придется различать два сорта уравнений: уравнения типа (2), которые оказываются нарушенными на величину порядка ε после применения вариации, и уравнения, остающиеся справедливыми с точностью до ε под действием вариации. Уравнение (1) будет этого второго сорта, поскольку вариация L будет по определению равна вариации функции $L(q, \dot{q})$. Уравнения первого сорта мы будем называть *слабыми уравнениями* и писать их с обычным знаком равенства «=», а уравнения второго будем называть *сильными уравнениями* и писать их со знаком « \equiv ».

Мы имеем следующие правила, регулирующие алгебраические действия со слабыми и сильными уравнениями:

$$\begin{aligned} \text{если } A \equiv 0, & \text{ то } \delta A = 0; \\ \text{если } X = 0, & \text{ то } \delta X \neq 0. \end{aligned}$$

Из слабого уравнения $X = 0$ мы можем заключить, что

$$\delta X^2 = 2X \delta X = 0,$$

так что получится сильное уравнение

$$X^2 \equiv 0.$$

Аналогично из двух слабых уравнений $X_1 = 0$ и $X_2 = 0$ мы можем вывести сильное уравнение

$$X_1 X_2 \equiv 0.$$

Может оказаться, что все N величин $\partial L / \partial \dot{q}_n$ в правой части (2) являются независимыми функциями N скоростей \dot{q}_n . В этом случае уравнения (2) определяют каждую \dot{q} как функцию аргументов q и p . Об этом случае будем говорить как о *стандартном*, и именно его обычно рассматривают в динамической теории.

Если $\partial L / \partial \dot{q}$ не являются независимыми функциями скоростей, можно исключить \dot{q} из уравнений (2) и получить одно или более уравнений

$$\varphi(q, p) = 0, \quad (3)$$

содержащих только переменные q и p . Мы можем считать уравнение (3) записанным так, что вариация меняет φ на величину порядка ε , так как если она меняет φ на величину порядка ε^k , то следует лишь заменить в (3) φ на $\varphi^{1/k}$, и желаемое условие окажется выполненным. Теперь вариация нарушает уравнение (3) на величину порядка ε , так что оно правильно пишется как слабое уравнение.

Нам потребуется использовать полный набор независимых уравнений типа (3), например:

$$\varphi_m(q, p) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (4)$$

Условие независимости означает, что ни одну из φ нельзя представить в виде линейной комбинации остальных с коэффициентами, зависящими от q и p . Условие полноты означает, что любая функция аргументов q и p , обращающаяся в нуль вследствие уравнений (2) и меняющаяся при вариации на величину порядка ε , может быть представлена как линейная комбинация функций φ_m с коэффициентами, зависящими от q и p .

Мы можем следующим образом описать соотношение между сильными и слабыми уравнениями. Возьмем $3N$ -мерное пространство с координатами q , \dot{q} и p . В этом пространстве найдется $2N$ -мерная область, в которой уравнения (2) удовлетворяются. Назовем ее областью R . Уравнения (4) также удовлетворяются в этой области, поскольку они следуют из (2). Рассмотрим теперь все точки $3N$ -мер-

ного пространства, которые удалены от R не далее чем на расстояния порядка ε . Они образуют $3N$ -мерную область подобную оболочке с толщиной порядка ε . Назовем ее областью R_ε . Слабое уравнение выполняется в области R , сильное уравнение выполняется в области R_ε .

§ 3. Гамильтониан

Гамильтониан H определяется соотношением

$$H \equiv p_n \dot{q}_n - L, \quad (5)$$

где подразумевается суммирование по всем значениям повторяющегося в одном члене индекса. Имеем

$$\begin{aligned} \delta H &= \delta (p_n \dot{q}_n - L) = \\ &= p_n \delta \dot{q}_n + \dot{q}_n \delta p_n - (\partial L / \partial q_n) \delta q_n - (\partial L / \partial \dot{q}_n) \delta \dot{q}_n = \\ &= \dot{q}_n \delta p_n - (\partial L / \partial q_n) \delta q_n. \end{aligned} \quad (6)$$

Мы обнаруживаем, что δH не зависит от $\delta \dot{q}_n$. Этот важный результат справедлив вне зависимости от того, стандартный у нас случай или нет.

Уравнение (5) дает определение H как функции q , \dot{q} и p , справедливое во всем $3N$ -мерном пространстве q , \dot{q} и p . Мы будем пользоваться этим определением только в области R_ε , а в ней справедлив, с точностью до первого порядка, результат (6). Это означает, что если мы оставим постоянными q и p и возьмем вариацию первого порядка у \dot{q} , вариация H будет второго порядка. Таким образом, если мы сохраним постоянными q и p и возьмем конечную вариацию у \dot{q} , оставаясь все время в области R_ε (что возможно, когда случай не стандартный), вариация H будет первого порядка. Если же мы остаемся в области R , вариация H будет равна нулю. Следовательно, в области R гамильтониан H является функцией только q и p . Обозначив эту функцию $\mathcal{H}(q, p)$, мы имеем слабое уравнение

$$H = \mathcal{H}(q, p), \quad (7)$$

справедливое в области R . В стандартном случае функция \mathcal{H} — это обычный гамильтониан.

Отправляясь от точки в R и совершая общую вариацию, из (6) мы имеем

$$\delta(H - \mathcal{H}) = \left(\dot{q}_n - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_n} \right) \delta p_n - \left(\frac{\partial L}{\partial q_n} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_n} \right) \delta q_n.$$

Таким образом, $\delta(H - \mathcal{H})$ зависит только от δq и δp . Если вариация такова, что мы остаемся в области R , то, конечно, $\delta(H - \mathcal{H}) = 0$. Таким образом, $\delta(H - \mathcal{H})$ обращается в нуль для любой вариации q и p такой, что можно выбрать δq сохраняющими уравнения (2). Это налагает на δq и δp единственное ограничение — чтобы они сохраняли уравнения (4), т. е. приводили к $\delta\varphi_m = 0$ для всех m . Таким образом, $\delta(H - \mathcal{H})$ равна нулю для любых величин δq , δp , которые дают $\delta\varphi_m = 0$, а следовательно, для произвольных δq , δp

$$\delta(H - \mathcal{H}) = v_m \delta\varphi_m \quad (8)$$

с подходящими коэффициентами v_m . Эти коэффициенты будут функциями q , \dot{q} и p , а с помощью (2) их можно представить функциями только q и \dot{q} . Теперь из (8) и (4) мы получаем

$$\delta(H - \mathcal{H} - v_m \varphi_m) = \delta(H - \mathcal{H}) - v_m \delta\varphi_m - \varphi_m \delta v_m = 0$$

и, следовательно,

$$H \equiv \mathcal{H} + v_m \varphi_m. \quad (9)$$

Мы имеем здесь сильное уравнение, справедливое с точностью до первого порядка в области R_a , в противоположность слабому уравнению (7), справедливому только в R .
Уравнение (8) дает

$$\begin{aligned} \delta H &= \delta \mathcal{H} + v_m \delta \varphi_m = \\ &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_n} \delta p_n + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_n} \delta q_n + v_m \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial p_n} \delta p_n + \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_n} \delta q_n \right). \end{aligned}$$

Сравнивая это с (6), мы получаем

$$\dot{q}_n = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_n} + v_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial p_n}, \quad (10)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial q_n} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_n} + v_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_n}. \quad (11)$$

Уравнения (10) выражают \dot{q} через q , p и v , (10) и (11) показывают, что $2N$ переменных q_n , \dot{q}_n можно выразить через $2N + M$ переменных q_n , p_n , v_m . Между этими $2N + M$ переменными имеется M соотношений (4). Любых других соотношений между этими переменными быть не может, иначе $2N$ переменных q_n , \dot{q}_n не были бы независимыми. Таким образом, каждая из v не должна зависеть от q , p и остальных v . Сами v можно считать переменными типа

скорости, служащими для фиксации тех \dot{q} , которые нельзя выразить через q и p .

Работая с гамильтоновой формой динамики, мы используем в качестве основных переменные q , p и v , которые предполагаются связанными некоторыми соотношениями (4), а в остальном — независимыми. Мы будем называть их *гамильтоновыми переменными*.

§ 4. Уравнения движения

Обычные лагранжевы уравнения движения мы считаем слабыми уравнениями

$$\dot{p}_n = \partial L / \partial q_n. \quad (12)$$

Подставляя в (12) значения p из (2), мы получаем уравнения, содержащие ускорения \ddot{q}_n . В стандартном случае эти уравнения определяют все \ddot{q} как функции q и \dot{q} . В случае с M уравнениями (4) уравнения движения дадут нам только $N - M$ уравнений для \ddot{q} . Остающиеся M уравнений движения покажут нам, как меняются со временем φ_m . Для самосогласованности φ_m должны остаться нулями. Эти условия самосогласованности будут исследованы позднее.

С помощью (11) уравнения движения (12) принимают вид

$$\dot{p}_n = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_n} - v_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_n}. \quad (13)$$

Уравнения (13) вместе с (10) образуют гамильтоновы уравнения движения. Их задают функция \mathcal{H} и уравнения $\varphi_m = 0$. Гамильтоновы уравнения движения выражают \dot{q} и p через гамильтоновы переменные q , p , v . Они не дают прямой информации о \dot{v} , но исследование условий самосогласованности даст нам некоторую косвенную информацию.

Гамильтоновы уравнения движения выглядят проще, если воспользоваться понятием скобки Пуассона (СП). Для любых двух функций ξ и η аргументов q и p СП $[\xi, \eta]$ определяется соотношением

$$[\xi, \eta] \equiv \frac{\partial \xi}{\partial q_n} \frac{\partial \eta}{\partial p_n} - \frac{\partial \xi}{\partial p_n} \frac{\partial \eta}{\partial q_n}. \quad (14)$$

Легко проверить, что СП остается инвариантной относительно такого преобразования к новым q и p , при котором новые q — любые независимые функции первоначаль-

ных q , а новые p определяются новыми уравнениями (2) с L , выраженным через новые q и их производные по времени. СП приобретает свое значение благодаря этому свойству инвариантности.

СП обладает следующими свойствами, легко проверяемыми из определения:

$$\begin{aligned} [\xi, \eta] &= -[\eta, \xi], \\ [\xi, f(\eta_1, \eta_2, \dots)] &= \frac{\partial f}{\partial \eta_1} [\xi, \eta_1] + \frac{\partial f}{\partial \eta_2} [\xi, \eta_2] + \dots, \quad (15) \\ [\xi, [\eta, \zeta]] + [\eta, [\zeta, \xi]] + [\zeta, [\xi, \eta]] &= 0. \end{aligned}$$

Во втором из этих свойств f —любая функция набора величин η_1, η_2, \dots , каждая из которых зависит от q и p . Третье свойство, называемое тождеством Пуассона¹⁾, справедливо для любых трех функций ξ, η, ζ , зависящих от q и p .

Желательно расширить понятие СП на функции, зависящие от скоростей \dot{q} , которые нельзя выразить только через q и p . Мы примем, что эти более общие СП обладают свойствами (15), а в остальном произвольны. Напротив, мы можем предположить, что \dot{q} произвольным образом зависят от q и p , а свойства (15) тогда можно вывести для ξ, η и ζ , зависящих и от \dot{q} .

Из сильного уравнения $A \equiv 0$ мы можем вывести слабые уравнения

$$\frac{\partial A}{\partial q_n} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial \dot{q}_n} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial p_n} = 0$$

и, следовательно, с использованием второго из свойств (15)

$$[\xi, A] = 0$$

для любой ξ . Может оказаться, что $[\xi, A] \equiv 0$ (например, когда $A \equiv 0$ по определению), но в общем случае это не так. Из слабого уравнения $X = 0$ не следует общего заключения, что $[\xi, X] = 0$.

Если g —любая функция q и p , из (10) и (13) мы имеем

$$\begin{aligned} \dot{g} &= \frac{\partial g}{\partial q_n} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_n} + v_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial p_n} \right) - \frac{\partial g}{\partial p_n} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_n} + v_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_n} \right) = \\ &= [g, \mathcal{H}] + v_m [g, \varphi_m]. \quad (16) \end{aligned}$$

¹⁾ В нашей литературе это тождество обычно называют тождеством Якоби.— *Примеч. пер.*

Это — общее гамильтоново уравнение движения. С помощью (4) его можно переписать в виде

$$\dot{g} = [g, \mathcal{H}] + v_m [g, \varphi_m] + [g, v_m] \varphi_m = [g, H], \quad (17)$$

в точности совпадающем с обычным гамильтоновым уравнением движения, записанным через СП.

§ 5. Однородность по скоростям

Теория принимает особенно простой вид в случае, когда лагранжиан однороден первой степени по скоростям. Тогда определяемые соотношением (2) импульсы однородны нулевой степени по \dot{q} и зависят поэтому только от отношений \dot{q} . Поскольку имеется N импульсов p и только $N-1$ независимых отношений \dot{q} , теперь p не могут быть независимыми функциями \dot{q} , и должно существовать хотя бы одно соотношение (4), связывающее q и p . Случай, когда имеется только одно соотношение между q и p , можно считать теперь стандартным.

Из теоремы Эйлера мы имеем

$$L \equiv \dot{q}_n \partial L / \partial \dot{q}_n \quad (18)$$

и, следовательно,

$$L = \dot{q}_n p_n,$$

так что

$$H = 0. \quad (19)$$

Это слабое уравнение, справедливое в области R , позволяет нам взять $\mathcal{H} \equiv 0$, так что (9) переходит в

$$H \equiv v_m \varphi_m. \quad (20)$$

Общее уравнение движения (16) теперь имеет вид

$$\dot{g} = v_m [g, \varphi_m]. \quad (21)$$

Гамильтоновы уравнения движения полностью фиксированы теперь уравнениями $\varphi_m = 0$.

Правая часть уравнения (21) однородна по v . Взяв любое решение уравнений движения, можно получить из него другое решение, домножив все v на множитель γ , произвольно меняющийся со временем. Скорость изменения всех динамических переменных в новом решении будет домножена на γ . Новое решение получится из предыдущего, если время t заменить новой независимой переменной τ такой, что $dt/d\tau = \gamma$. Новая независимая переменная совер-

шенно произвольна: она может быть любой функцией t , а также q и \dot{q} . Итак, взяв любое решение уравнений движения, мы можем получить из него другое решение, заменив t произвольной τ , так что *уравнения движения не дают нам никакой информации о независимой переменной*. В этом состоит важная черта динамической теории с однородностью по скоростям, предоставляющая особые удобства для релятивистской формулировки.

Лагранжиану любой динамической системы можно придать однородность по скоростям, взяв время t дополнительной координатой q_0 и воспользовавшись уравнением $\dot{q}_0 = 1$, чтобы добиться однородности первой степени по всем скоростям, включая \dot{q}_0 . Как было показано автором [1]¹⁾, после этого можно вывести новые лагранжевы уравнения движения для всех q . Так мы можем получить новую формулировку в «однородных скоростях» для общей динамической системы. Новая формулировка даст все уравнения старой, за исключением уравнения $\dot{q}_0 = 1$. Если в новой формулировке желательно его иметь, мы можем считать его дополнительным условием, не выводимым из уравнений движения, но согласованным с ними. Однако мы вполне можем обойтись и без него, так как его роль сводится лишь к фиксации независимой переменной, которая без этого в «однородной» формулировке была бы произвольной.

Таким образом, мы можем без потери общности ограничиться теорией с однородностью по скоростям. Поскольку она приводит к несколько более простым уравнениям, в дальнейшем мы и сделаем это. Точка будет обозначать дифференцирование по произвольной независимой переменной τ .

§ 6. Условия самосогласованности

Для самосогласованности уравнения движения должны сохранять нулем каждую из φ_m . Таким образом, подставив φ_m вместо g в (21), мы получаем

$$v_m [\varphi_m', \varphi_m] = 0. \quad (22)$$

Предположим, что уравнения (22) приведены к наиболее простому виду с помощью набора уравнений (4). При этом допускается сокращение множителей, когда их можно считать не обращающимися в нуль. Получившиеся уравнения должны быть одного из четырех типов.

¹⁾ Здесь ссылки приведены в конце статьи.— *Примеч. пер.*

Тип 1. Уравнение содержит некоторые из переменных v .

Тип 2. Уравнение не зависит от v , но содержит некоторые из переменных p и q . Таким образом, оно имеет вид

$$\chi(q, p) = 0 \quad (23)$$

и не зависит от уравнений (4).

Тип 3. Уравнение сводится к $0 = 0$.

Тип 4. Уравнение сводится к $1 = 0$.

Уравнение типа 2 приводит к новому условию самосогласованности, так как χ должна сохранять нулевое значение. Подставив в (21) χ вместо g , мы получаем

$$v_m[\chi, \varphi_m] = 0. \quad (24)$$

Это уравнение, приведенное к наиболее простому виду с помощью уравнений (4) и уже имеющихся уравнений (23), снова будет одного из четырех типов. Будучи уравнением типа 2, оно приведет еще к одному новому условию самосогласованности. Эта процедура продолжается для каждого уравнения типа 2, пока она не приведет к уравнению другого типа.

Если одно из полученных таким образом уравнений — типа 4, то уравнения движения противоречивы. Этот случай не представляет никакого интереса и в дальнейшем не рассматривается. Уравнения типа 3 удовлетворяются автоматически. В итоге в нашей теории остаются уравнения типов 1 и 2.

Обозначим полный набор уравнений типа 2:

$$\chi_k(q, p) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (25)$$

Мы можем полагать, что функции χ_k , подобно φ_m в (4), выбраны так, что их вариации порядка ϵ . Тогда уравнения (25) корректно записываются как слабые уравнения. Эти новые слабые уравнения сужают область R , в которой слабые уравнения справедливы, понижая ее размерность до $2N - K$. Окажется суженной и область R_ϵ , так как теперь она будет состоять из точек, удаленных не более чем на расстояние порядка ϵ от новой области R .

Для изучения уравнений типа 1 удобно ввести некоторые новые понятия. Назовем одну из величин φ_m величиной *первого рода* (*first class* φ), если ее СП со всеми φ и χ обращаются в нуль. Таким образом, φ_m — первого рода, если

$$\begin{aligned} [\varphi_m, \varphi_m] &= 0, \quad m = 1, 2, \dots, M, \\ [\varphi_m, \chi_k] &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, K. \end{aligned} \quad (26)$$

Эти уравнения обязаны удовлетворяться только в слабом смысле, т. е. только как следствия уравнений $\varphi_m = 0$, $\chi_k = 0$. Таким образом, каждая из левых частей (26) должна равняться в сильном смысле некоторой линейной комбинации φ_m и χ_k . Величину φ , не удовлетворяющую всем этим условиям, мы называем величиной *второго рода* (*second class* φ).

Мы можем подвергнуть величины φ линейному преобразованию вида

$$\varphi_m^* = \gamma_{mm'} \varphi_{m'}, \quad (27)$$

где γ — любые функции q и p такие, что их детерминант не обращается в нуль в слабом смысле. Тогда для всех целей теории величины φ и φ^* эквивалентны.

Прделаем преобразование такого типа с тем, чтобы обратить в величины первого рода как можно больше φ . Получившиеся тогда φ первого рода обозначим φ_α , а φ второго рода — φ_β , где $\beta = 1, 2, \dots, B$, и $\alpha = B + 1, B + 2, \dots, M$.

Если $\varphi_{m'}$ — первого рода, то уравнение (22) удовлетворяется автоматически. Далее, в уравнениях (22) и (24) мы можем оставить только φ_m второго рода, поскольку φ_m первого рода дают нулевой вклад. Таким образом, в уравнениях (22) и (24) выживают только члены

$$\begin{aligned} u_\beta [\varphi_\beta, \varphi_{\beta'}] &= 0, & \beta, \beta' &= 1, 2, \dots, B, \\ u_\beta [\varphi_\beta, \chi_k] &= 0, & k &= 1, 2, \dots, K. \end{aligned} \quad (28)$$

Это и есть все уравнения типа 1. Они показывают, что либо все u_β обращаются в нуль, либо матрица

$$\begin{vmatrix} 0 & [\varphi_1, \varphi_2] & \dots & [\varphi_1, \varphi_B] & [\varphi_1, \chi_1] & \dots & [\varphi_1, \chi_K] \\ [\varphi_2, \varphi_1] & 0 & \dots & [\varphi_2, \varphi_B] & [\varphi_2, \chi_1] & \dots & [\varphi_2, \chi_K] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\varphi_B, \varphi_1] & [\varphi_B, \varphi_2] & \dots & 0 & [\varphi_B, \chi_1] & \dots & [\varphi_B, \chi_K] \end{vmatrix} \quad (29)$$

имеет ранг, меньший B (в слабом смысле).

Сейчас будет показано, что реализуется первая из альтернативных возможностей. Предположим, что матрица (29) имеет ранг $U < B$.

Образуем детерминант

$$D = \begin{vmatrix} \varphi_1 & 0 & [\varphi_1, \varphi_2] & \dots & [\varphi_1, \varphi_U] \\ \varphi_2 & [\varphi_2, \varphi_1] & 0 & \dots & [\varphi_2, \varphi_U] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{U+1} & [\varphi_{U+1}, \varphi_1] & [\varphi_{U+1}, \varphi_2] & \dots & [\varphi_{U+1}, \varphi_U] \end{vmatrix}. \quad (30)$$

Он — линейная комбинация φ_β и поэтому обращается в нуль в слабом смысле. СП любой величины f с D равна

сумме детерминантов, образованных взятием СП каждого из столбцов (30) с f . За исключением детерминанта с СП первого столбца с f , все они обращаются в нуль в слабом смысле, поскольку все элементы их первого столбца — нули в слабом смысле. Таким образом,

$$[D, f] = \begin{vmatrix} [\varphi_1, f] & 0 & [\varphi_1, \varphi_2] & \dots & [\varphi_1, \varphi_U] \\ [\varphi_2, f] & [\varphi_2, \varphi_1] & 0 & \dots & [\varphi_2, \varphi_U] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ [\varphi_{U+1}, f] & [\varphi_{U+1}, \varphi_1] & [\varphi_{U+1}, \varphi_2] & \dots & [\varphi_{U+1}, \varphi_U] \end{vmatrix}. \quad (31)$$

Если взять в качестве f любую из φ_α , первый столбец в (31) обращается в нуль, и поэтому $[D, \varphi_\alpha] = 0$. Если взять в качестве f любую из φ_β или χ , то либо детерминант (31) имеет два одинаковых столбца и поэтому обращается в нуль, либо он есть минор матрицы (29) с $U+1$ строками и столбцами и обращается в нуль, поскольку ранг этой матрицы по предположению равен U . Таким образом, D имеет нулевую СП со всеми φ и χ .

Может оказаться, что D обращается в нуль в сильном смысле — из-за того, что обращаются в нуль в слабом смысле алгебраические дополнения всех элементов его первого столбца. В этом случае мы возьмем другой детерминант D , со столбцами помимо первого, отвечающими любым U столбцам (29), и строками, отвечающими любым $U+1$ строкам (29). Благодаря предположению, что (29) имеет ранг U , мы всегда можем выбрать такой детерминант D , что не все алгебраические дополнения элементов его первого столбца обращаются в нуль. Таким образом, мы получаем D , являющийся величиной первого рода и одновременно линейной комбинацией φ . Это противоречит предположению, что ранее мы сделали величинами первого рода максимально возможное число φ .

Мы можем заключить, что если мы сделали величинами первого рода максимально возможное количество φ , то обращаются в нуль все v , ассоциированные с φ второго рода. Тогда гамильтониан (20) сводится к

$$H \equiv v_\alpha \varphi_\alpha, \quad (32)$$

а общее уравнение движения (21) приобретает вид

$$\dot{g} = v_\alpha [g, \varphi_\alpha]. \quad (33)$$

Обращение в нуль v_β и уравнения (25) гарантируют, что все условия согласованности удовлетворяются; v_α остаются полностью неопределенными. Каждый из них дает начало свободе в движении — произвольной функции

в общем решении уравнений движения. В стандартном случае имеется в точности одна φ , которая с необходимостью — первого рода, и поэтому имеется одна произвольная функция в общем решении уравнений движения. Это связано с произволом в независимой переменной t .

§ 7. Дополнительные условия

Имея дело с конкретной динамической системой, мы можем пожелать, чтобы координаты и скорости подчинялись уравнениям, добавочным к уравнениям движения, которые следуют из лагранжиана. Такие дополнительные условия должны вводиться в теорию как еще одни слабые уравнения.

С помощью уравнений (10) (с $\mathcal{H} \equiv 0$) дополнительные условия можно записать как соотношения между q , p и v . Они могут привести к уравнениям только между q и p . Такие уравнения следует трактовать как новые χ -уравнения и присоединить к набору (25). Они приведут к новым условиям согласованности, с которыми следует обращаться так же, как и с предыдущими, и это может дать следующие новые χ -уравнения. φ [первого рода следует теперь определять как имеющие нулевые СП и с этими новыми χ , так что дополнительные условия могут понизить число связей φ первого рода. Тогда это вызовет снижение числа степеней свободы.

Те из дополнительных условий, которые не дают χ -уравнений, дадут условия на переменные v . Как правило, эти последние условия будут более сложного вида, чем просто требования обращения в нуль некоторых v , как это всегда было с условиями на v , следовавшими из условий согласованности. Они приведут к дальнейшему снижению числа степеней свободы, понизив его до величины, меньшей числа φ первого рода.

§ 8. Преобразования гамильтоновой формы

Возьмем набор зависящих от q и p функций θ_s ($s = 1, 2, \dots, S$) таких, что детерминант

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 0 & [\theta_1, \theta_1] & [\theta_1, \theta_2] & \dots & [\theta_1, \theta_S] \\ [\theta_2, \theta_1] & 0 & [\theta_2, \theta_2] & \dots & [\theta_2, \theta_S] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\theta_S, \theta_1] & [\theta_S, \theta_2] & [\theta_S, \theta_3] & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad (34)$$

не обращается в нуль в слабом смысле. Это значит, что S должно быть четным. Пусть c_{sp} обозначает алгебраиче-

ское дополнение $[\theta_s, \theta_{s'}]$, деленное на Δ , так что

$$c_{ss'} \equiv -c_{s's}$$

и

$$c_{s's} [\theta_{s'}, \theta_{s''}] \equiv \delta_{ss''}. \quad (35)$$

Тогда для любых двух величин ξ и η мы можем определить новую СП $[\xi, \eta]^*$ формулой

$$[\xi, \eta]^* \equiv [\xi, \eta] + [\xi, \theta_s] c_{ss'} [\theta_{s'}, \eta]. \quad (36)$$

Легко видеть, что новая СП обладает первыми двумя из свойств (15), а в справедливости третьего, тождества Пуассона, убеждает прямая выкладка (см. Приложение, § 12). Новая СП дает для любой ξ :

$$\begin{aligned} [\xi, \theta_s]^* &\equiv [\xi, \theta_s] + [\xi, \theta_{s'}] c_{s's''} [\theta_{s''}, \theta_s] \equiv \\ &\equiv [\xi, \theta_s] - [\xi, \theta_{s'}] \delta_{s's} \equiv 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Чтобы понять значение новых СП, возьмем случай, когда набор θ состоит из $1/2 S$ координат q и сопряженных им импульсов p . Тогда мы видим, что новая СП получается вычеркиванием из суммы по n в определении (14) всех членов, содержащих производные по этим q и p . Таким образом, новая СП относится к системе с $N - 1/2 S$ степенями свободы. Взяв в качестве θ не в точности некоторые q и p , а любые независимые функции этих q и p , мы получаем ту же самую новую СП. Для таких общих θ новые СП по-прежнему будут относиться к системе с $N - 1/2 S$ степенями свободы, но редукция числа степеней свободы более сложна и не сводится к простому вычеркиванию некоторых q и p .

Предположим, что в качестве θ выступают все φ или χ (φ должны быть второго рода, так как иначе $\Delta = 0$). Тогда мы имеем $[\theta_s, H] = 0$ для всех s , и, следовательно,

$$[g, H]^* = [g, H] = \dot{g}, \quad (38)$$

где g — любая функция q и p . Таким образом, с помощью новой СП можно записывать гамильтоновы уравнения движения. Таким путем мы получаем новую форму уравнений движения, более простую, поскольку эффективное число степеней свободы понизилось.

Теперь каждая из θ обращается в нуль в слабом смысле. Работая только с новыми СП, мы без риска вступить в противоречие можем полагать, что каждая из θ обращается в нуль в сильном смысле, потому что согласно (37) обращается в нуль новая СП θ с чем угодно,

Тогда мы можем использовать сильные уравнения $\theta_s \equiv 0$, чтобы упростить гамильтониан.

Назовем χ величиной первого рода, если она имеет нулевую СП со всеми φ и χ , и величиной второго рода в противном случае. Мы можем проделать над χ линейное преобразование вида

$$\chi_k^* = \gamma_{kk'} \chi_{k'} + \gamma'_{km} \varphi_m, \quad (39)$$

где γ и γ' — любые функции q и p такие, что детерминант γ не обращается в нуль в слабом смысле; тогда новые χ^* эквивалентны старым для всех целей теории. Проведем преобразование такого типа с тем, чтобы обратить в величины первого рода как можно больше χ , и получившиеся тогда χ первого рода обозначим χ_α , а второго рода — χ_β .

Мы можем взять в качестве θ все φ_β и χ_β . Тогда детерминант Δ не обращается в нуль. Доказательство этого факта аналогично доказательству того, что ранг матрицы (29) равен B : предположив, что Δ имеет ранг $T < S$, и построив детерминант вида

$$\begin{vmatrix} \theta_1 & 0 & [\theta_1, \theta_2] & \dots & [\theta_1, \theta_T] \\ \theta_2 & [\theta_2, \theta_1] & 0 & \dots & [\theta_2, \theta_T] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta_{T+1} & [\theta_{T+1}, \theta_1] & [\theta_{T+1}, \theta_2] & \dots & [\theta_{T+1}, \theta_T] \end{vmatrix}, \quad (40)$$

следует убедиться, что Δ является величиной первого рода по отношению к φ и χ и одновременно — линейной комбинацией φ_β и χ_β , так что это противоречит предположению, что величинами первого рода сделано максимальное число φ и χ .

Такой выбор θ дает максимальное в описанном методе упрощение гамильтоновых уравнений движения. Мы получаем новую схему, в которой все уравнения для φ_β и χ_β сильные. Мы можем использовать эти уравнения для полного исключения из теории некоторых q и p .

Вид новой схемы неоднозначен, поскольку неоднозначны φ_β и χ_β . Просто заменив φ_β и χ_β линейными комбинациями их самих, мы не изменим окончательного вида. Однако мы можем добавить к φ_β любые линейные комбинации φ_α , а к χ_β — любые линейные комбинации φ_α и χ_α . Это не изменит Δ или c_{sr} , но, вообще говоря, изменит $[\xi, \eta]^*$, так что вид гамильтоновой схемы внешне изменится. Конечно, внешне отличающиеся схемы должны быть эквивалентны, поскольку все они дают одни и те же уравнения движения.

В качестве применения описанного метода рассмотрим случай, когда лагранжиан не содержит некоторых скоростей. Предположим, что L не содержит \dot{q}_j ($j=1, 2, \dots, J < N$). Тогда каждый p_j в слабом смысле равен нулю, а в сильном — φ . Предположим, что ни одна линейная комбинация p_j не является величиной первого рода. Тогда мы можем считать, что p_j суть φ_{β} . Возьмем теперь в качестве половины набора θ эти p_j , а в качестве другой половины — подходящие φ или χ второго рода, так, чтобы Δ не обращался в нуль. Эти другие θ назовем θ_j . Легко видеть, что при таком выборе θ именно новые СП и получились бы применением определения (14) к тем степеням свободы, для которых из числа q исключены q_j , причем каждый p_j считается сильно равным нулю, а каждая q_j — сильно равной функции остальных q и p , заданной уравнениями $\theta_j \equiv 0$. Таким путем мы получаем новую гамильтонову схему (не обязательно максимально упрощенную, поскольку могут существовать другие φ_{β} и χ_{β} , не включенные в число θ), в которой q_j и p_j не появляются как независимые динамические переменные.

Новую схему можно было бы получить и более прямым путем, с самого начала не считая q_j координатами и вообще не вводя сопряженных им импульсов. Посмотрим, какие модификации внесло бы это в развитие теории.

Обозначим через n те и только те значения индексов, для которых q не есть q_j , т. е. значения $J+1, J+2, \dots, N$. Тогда уравнения (2) и (5) остаются в силе, а уравнение (6) следует заменить на

$$\delta H = \dot{q}_n \delta p_n - \partial L / \partial q_n \cdot \delta q_n - \partial L / \partial q_j \cdot \delta q_j, \quad (41)$$

поскольку мы допускаем варьирование q_j . Уравнения

$$\partial L / \partial q_j = 0 \quad (42)$$

мы можем считать при этом дополнительными условиями. Тогда уравнение (41) сводится просто к (6). Мы можем заключить, что H имеет вид (20), где φ_n зависят от q_n и p_n , не зависят от q_j и обращаются в нуль как следствие уравнений (2). В дальнейшем теорию можно развивать, как и ранее, в терминах φ и χ , не зависящих от q_j . Те же из уравнений для φ и χ , которые содержат q_j , можно считать определяющими q_j через другие переменные, и в дальнейшем они не играют в теории никакой роли.

В такой форме теории мы имеем лагранжиан, содержащий зависящие от импульсов переменные q_j . Появление импульсных переменных в лагранжиане аналогично появлению скоростей v_α в гамильтониане.

§ 9. Гамильтониан как исходное понятие

Вместо того, чтобы начинать с лагранжиана и получать из него гамильтониан, можно начинать с гамильтониана. Мы полагаем, что имеются некоторые динамические переменные q_n и p_n ($n=1, 2, \dots, N$) и, возможно, другие динамические переменные, между которыми определены СП, обладающие свойствами (15), и что их связывают некоторые слабые уравнения в качестве φ -уравнений. На таком пути нет оснований различать φ и χ . По крайней мере, одна из φ должна быть первого рода, т. е. иметь нулевые СП со всеми φ , иначе не будет непротиворечивого движения. Предположим затем, что гамильтониан есть линейная комбинация φ_α (φ первого рода) с новыми переменными v_α в качестве коэффициентов, а гамильтоновы уравнения движения имеют вид (17) или (33). Сами v могут быть произвольными функциями независимой переменной τ .

Прежнюю схему уравнений движения, выведенных из лагранжиана и включающих как φ , так, возможно, и χ , следует считать примером настоящей схемы, в котором некоторые из v обращены в нуль дополнительными условиями. Тогда φ_α , отвечающие этим v_α , суть χ первого рода в прежней схеме. Такие дополнительные условия, да и любые дополнительные условия, содержащие v , ничего не дают в приложениях теории к релятивистской динамике, рассматриваемых в следующем разделе, и не могут быть перенесены в квантовую теорию, так что в дальнейшем они исключаются. Дополнительные же условия, не содержащие v , суть в точности φ -уравнения.

СП двух φ первого рода есть φ первого рода, в чем можно убедиться следующим образом. СП $[\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha'}]$ слабо обращается в нуль и поэтому в сильном смысле равна линейной комбинации φ —единственных величин, слабо равных нулю в настоящей схеме. Мы должны показать, что ее СП с любой φ слабо равна нулю. Из тождества Пуассона:

$$[\varphi, [\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha'}]] \equiv [[\varphi, \varphi_\alpha], \varphi_{\alpha'}] - [[\varphi, \varphi_{\alpha'}], \varphi_\alpha]. \quad (43)$$

Поскольку φ_α —первого рода, $[\varphi, \varphi_\alpha]$ слабо равна нулю

и потому в сильном смысле есть линейная комбинация φ , откуда ее СП с $\varphi_{\alpha'}$ первого рода слабо обращается в нуль. Аналогично слабо обращается в нуль второй член в правой части (43), и необходимый результат доказан.

Предположим, что имеется A независимых φ первого рода и M всех независимых φ . В фазовом пространстве ($2N$ -мерном пространстве переменных q_n и p_n) имеется $(2N - M)$ -мерное подпространство, в котором выполнены все φ -уравнения. Назовем его $(2N - M)$ -пространством. Состояние динамической системы при данном значении t фиксируется заданием переменных q и p , удовлетворяющих всем φ -уравнениям, т. е. представляется точкой P в $(2N - M)$ -пространстве. Движение системы, исходным для которого является это состояние, представляется в $(2N - M)$ -пространстве кривой с началом в P . Благодаря произвольности A переменных v_{α} эта кривая может уходить в любом направлении в малом пространстве A измерений, охватывающем P . Для каждой точки $(2N - M)$ -пространства имеется такое малое A -мерное охватывающее пространство. Покажем теперь, что эти малые пространства интегрируемы.

Предположим, что в интервале времени $\delta t = \varepsilon_1$ обращаются в нуль все v , за исключением $v_{\alpha'}$, равной 1, в следующем интервале $\delta t = \varepsilon_2$ — все v , за исключением $v_{\alpha''}$, также равной 1. Тогда любая функция g , зависящая от q и p , в конце первого интервала переходит в

$$g + \varepsilon_1 [g, \varphi_{\alpha'}].$$

В конце второго интервала, с учетом членов порядка $\varepsilon_1 \varepsilon_2$, но в пренебрежении членами порядка ε_1^2 и ε_2^2 , она переходит в

$$g + \varepsilon_1 [g, \varphi_{\alpha'}] + \varepsilon_2 [g + \varepsilon_1 [g, \varphi_{\alpha'}], \varphi_{\alpha''}]. \quad (44)$$

Если эти два движения совершаются в обратной последовательности, g переходит в

$$g + \varepsilon_2 [g, \varphi_{\alpha''}] + \varepsilon_1 [g + \varepsilon_2 [g, \varphi_{\alpha''}], \varphi_{\alpha'}]. \quad (45)$$

Разность между (44) и (45) благодаря тождеству Пуассона равна

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 [g, [\varphi_{\alpha'}, \varphi_{\alpha''}]]. \quad (46)$$

Выше было показано, что $[\varphi_{\alpha'}, \varphi_{\alpha''}]$ есть φ первого рода, так что (46) есть возможное изменение g , описываемое уравнениями движения при подходящем выборе v и по-

этому отвечающее повороту в малом A -мерном пространстве вокруг начальной точки. Это и есть условие интегрируемости.

Если в дополнительные условия войдут v , эта интегрируемость может подпортиться. Таким образом, для введенных из лагранжиана уравнений движения интегрируемость не обязательно имеет место.

Объединение малых пространств образует набор лежащих в $(2N - M)$ -пространстве A -мерных пространств таких, что движение всегда происходит только в одном из них. Назовем эти пространства A -пространствами. Каждая кривая в A -пространстве представляет возможное решение уравнений движения. Каждая точка $(2N - M)$ -пространства лежит в некотором A -пространстве, содержащем все начинающиеся в этой точке траектории. Полным решением уравнений движения допустимо считать само A -пространство, а не кривую общего положения в нем.

Точку данного A -пространства можно фиксировать A координатами, каждая из которых есть некоторая функция q и p . Обозначим эти координаты t_a ($a = 1, 2, \dots, A$). Они будут играть роль временных переменных. Само A -пространство можно описать, задав зависимость всех q и p от t_a . Если g есть любая из q и p или их функция, мы имеем

$$\dot{g} = \dot{t}_a \partial g / \partial t_a, \quad (47)$$

поскольку зависимость g от τ можно считать порожденной зависимостью t_a от τ . Используя гамильтоновы уравнения движения (33) для \dot{g} и \dot{t}_a , мы получаем

$$v_\alpha [g, \varphi_\alpha] = v_\alpha [t_a, \varphi_\alpha] \partial g / \partial t_a.$$

Это уравнение выполняется для произвольных v_α , так что

$$[g, \varphi_\alpha] = [t_a, \varphi_\alpha] \partial g / \partial t_a. \quad (48)$$

Уравнения (48) можно считать общими уравнениями движения, фиксирующими A -пространство. В теории с однородностью по скоростям именно они наиболее похожи на обычные гамильтоновы уравнения движения. Если $A = 1$, то мы можем взять в качестве времени единственную переменную t_a , и (48) сведется в точности к обычным гамильтоновым уравнениям движения.

Чтобы перейти от гамильтониана к лагранжиану, мы введем скорости \dot{q}_n уравнениями

$$\dot{q}_n = v_\alpha \partial \varphi_\alpha / \partial p_n, \quad (49)$$

а затем определим L :

$$L \equiv p_n \dot{q}_n - H \equiv p_n \dot{q}_n - v_\alpha \varphi_\alpha \quad (50)$$

Это задает L как функцию q , \dot{q} , p и v , причём линейную по \dot{q} и v . Взяв независимые вариации δq , $\delta \dot{q}$, δp , δv , мы получаем

$$\delta L = \dot{q}_n \delta p_n + p_n \delta \dot{q}_n - \varphi_\alpha \delta v_\alpha - v_\alpha (\partial \varphi_\alpha / \partial q_n \cdot \delta q_n + \partial \varphi_\alpha / \partial p_n \cdot \delta p_n) = \\ = p_n \delta \dot{q}_n - v_\alpha \partial \varphi_\alpha / \partial q_n \cdot \delta q_n. \quad (51)$$

Таким образом, δL не зависит от δp_n и δv_n . Этот результат следует сопоставить с (6).

Если уравнения (49) вместе с ф-уравнениями выражают \dot{q} как независимые функции p и v , позволяя тем самым считать p и v функциями q и \dot{q} , то (51) показывает, что L есть функция только q и \dot{q} в сильном смысле. Эта функция должна быть однородной первой степени по \dot{q} . Ее частные производные по q и \dot{q} дают

$$\partial L / \partial \dot{q}_n = p_n, \\ \partial L / \partial q_n = -v_\alpha \partial \varphi_\alpha / \partial q_n = \dot{p}_n. \quad (52)$$

Это обычные лагранжевы уравнения.

Если уравнения (49) вместе с ф-уравнениями не выражают \dot{q} как независимые функции p и v , то они приводят к некоторым соотношениям, связывающим только q и \dot{q} , скажем,

$$R_j(q, \dot{q}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J. \quad (53)$$

R_j однородны по \dot{q} , и мы выбираем их так, чтобы однородность была первой степени. Дальнейшие действия аналогичны методу § 3, но с взаимной переменной ролей у p и \dot{q} . Мы получаем аналогичный (9) результат

$$L \equiv \mathcal{L} + \lambda_j R_j, \quad (54)$$

где \mathcal{L} зависит только от q и \dot{q} и должен быть однородным первой степени по \dot{q} , а коэффициенты λ_j зависят от q , p и v .

Если λ считать независимыми переменными при частном дифференцировании L , а L тогда однороден первой степени по \dot{q} , мы возвращаемся к уравнениям (52). Таким образом, мы имеем лагранжиан, содержащий импульс-

ные переменные; нечто подобное обсуждалось в конце предыдущего раздела, причем тогдашние q_j отвечают теперешним λ_j , а дополнительные условия (42)—уравнениям (53).

§ 10. Приложение к релятивистской динамике

В обычной нерелятивистской динамике работают с состояниями динамической системы в данный момент времени, причем это состояние характеризуется заданием значений q и p . Имеются уравнения движения, позволяющие по состоянию в один момент времени вычислить состояние в другой момент. Гамильтонова форма этих уравнений движения в случае однородности по скоростям требует только одной ϕ первого рода.

Чтобы получить динамическую теорию, удовлетворяющую частному принципу относительности, мы должны построить схему уравнений, равно применимых для наблюдателей со всеми скоростями. Если мы работаем с мгновениями¹⁾, мы должны охватить мгновение относительно всех наблюдателей. Тогда мгновение—это любая плоская трехмерная поверхность в пространстве-времени, нормаль к которой лежит внутри светового конуса. Чтобы описать общее мгновение, нужны четыре параметра—три для фиксации направления нормали (скорости наблюдателя) и четвертый, чтобы различить разные мгновения для одного наблюдателя.

Включая понятие мгновений, релятивистская динамика должна позволять по заданному состоянию в любое из этих мгновений вычислять состояние в любое другое. Мы должны располагать уравнениями движения, показывающими, как меняются динамические переменные с изменением этих мгновений. Мы должны допустить произвольные изменения мгновений—как трансляции в пространстве-времени, так и изменения в направлении нормали, и все это должны суметь описать уравнения движения. Таким образом, нам нужны четыре ϕ первого рода, чтобы породить четыре степени свободы в изменении мгновения.

Четыре параметра, описывающих мгновение, следует понимать как q , подчиняющиеся наряду с другими q и p уравнениям движения (17) или (33). Их отличие от других q и p состоит в том, что именно их удобно взять

¹⁾ *With instants*—см. статью 17 настоящего сборника.—Примеч. пер.

в качестве переменных t в уравнениях движения (48). Тогда эти уравнения явно показывают, как меняются любые q и p при данном изменении мгновения.

Есть другие формы релятивистской динамики, не использующие мгновений, как то обсуждалось автором [2]. Есть точечная форма, в которой состояние определяется относительно точки в пространстве-времени. Для этой формы также нужны четыре φ первого рода, соответственно четырем степеням свободы движения точки. Далее, есть фронтальная форма, для которой нужны три φ первого рода, соответственно трем степеням свободы движения фронта. Наконец, мы можем задавать состояние на произвольной трехмерной пространственноподобной поверхности в пространстве-времени. Тогда число φ первого рода должно быть бесконечным, соответственно всем деформациям, которые можно сделать с этой поверхностью. В каждой из этих форм переменные, описывающие точку, волновой фронт или произвольную пространственноподобную поверхность, следует понимать как q , подчиняющиеся уравнениям движения (17) или (33) и предпочтительно удобные для выбора в качестве переменных t в уравнении (48).

Обсуждавшиеся выше φ первого рода минимально необходимы для построения релятивистской динамики в соответственных формах. Могут быть и другие. Например, электродинамика, допускающая калибровочные преобразования даже после фиксации начальных значений всех q и p , должна обладать добавочными степенями свободы, для порождения которых будут нужны добавочные φ первого рода.

§ 11. Квантование

Чтобы проквантовать динамическую систему, получившую классическое описание, нужно построить систему линейных операторов, соответствующих классическим динамическим переменным q и p и их функциям. Ни классическим переменным v , ни переменным типа скорости вообще, ни комбинациям, явно содержащим τ , — нет соответствий среди операторов. Все операторы действуют на векторы ψ гильбертова пространства, представителями которых в любом представлении являются волновые функции, характеризующие состояния в квантовой теории. Вещественным классическим переменным соответствуют самосопряженные операторы,

Аналогия между линейными операторами и их классическими двойниками должна удовлетворять двум общим принципам. С обозначением одинаковыми символами обоих партнеров-двойников, эти принципы суть:

(i) СП-соотношения между классическими переменными соответствуют перестановочным соотношениям между операторами согласно формуле

$$[\xi, \eta] \text{ соответствует } 2\pi(\xi\eta - \eta\xi)/i\hbar;$$

(ii) слабые уравнения между классическими переменными соответствуют линейным условиям на векторы ψ согласно формуле

$$X(q, p) = 0 \text{ соответствуют } X\psi = 0.$$

Процедура перехода от классической к квантовой теории не вполне определена математически, поскольку всякий раз, когда классическое выражение содержит произведение двух множителей, СП которых не обращается в нуль, есть произвол в порядке, в котором должны появиться эти два множителя в соответствующем квантовом выражении. В простых реальных примерах этот вопрос решается без труда. В сложных примерах может оказаться невозможным так выбрать порядок в каждом месте, чтобы сделать непротиворечивыми все квант. вые уравнения, — а тогда и неизвестно, как проквантовать теорию. Все современные методы квантования являются по сути практическими приемами, основанием для применения которых служат соображения простоты.

Имеются некоторые общие соображения, которые следует иметь в виду при переходе к квантовой теории, чтобы сразу не столкнуться с тривиальной противоречивостью квантовых уравнений. В классической теории мы имеем некоторое число ϕ -уравнений (включая в него на равных правах χ -уравнения), которые в квантовой теории следует трактовать в соответствии с принципом (ii). Для классических ϕ мы можем провести линейное преобразование (27), и новые ϕ будут ничем не хуже старых. Проводя соответствующее преобразование в квантовой теории, мы должны озаботиться тем, чтобы все коэффициенты γ стояли слева от ϕ . Общая ϕ в квантовой теории есть линейная комбинация исходных ϕ с коэффициентами слева.

Из двух квантовых уравнений, полученных по ϕ -уравнениям согласно принципу (ii),

$$\Phi_1\psi = 0, \quad \Phi_2\psi = 0,$$

мы можем заключить, что

$$\varphi_2\varphi_1\psi = 0, \quad \varphi_1\varphi_2\psi = 0,$$

а отсюда согласно принципу (i)

$$[\varphi_1, \varphi_2]\psi = 0.$$

Это соответствует классическому слабому уравнению

$$[\varphi_1, \varphi_2] = 0.$$

Мы можем заключить, что если переход к квантовой теории возможен, то все φ должны быть первого рода.

Квантовую теорию можно построить и по классической теории с φ второго рода, — предварительно превратив все φ_2 -уравнения в сильные уравнения с помощью преобразования, описанного в § 8. Квантовым эквивалентом сильных уравнений будут уравнения между операторами, по которым одни из них можно определить через другие.

Квантовые уравнения $\varphi\psi = 0$, полученные из классических φ -уравнений применением принципа (ii) к φ первого рода, представляют собой волновые уравнения Шредингера. Обычная классическая динамика с единственной φ первого рода приводит к единственному уравнению Шредингера. В общей теории каждой классической степени свободы, характеризующей произвол в движении, отвечает свое уравнение Шредингера. В этих уравнениях все операторы соответствуют динамическим переменным при одном и том же значении t . Операторы, относящиеся к различным значениям t , принадлежат разным алгебраическим системам, и, по-видимому, в квантовой теории нет ничего похожего на t -зависимость классических переменных.

Однако описываемая уравнением (48) зависимость классических величин от параметров t имеет квантовый аналог, если только t выбраны так, что их взаимные СП равны нулю, и поэтому в квантовой теории им можно одновременно придать числовые значения. Предпочтительные t различных форм релятивистской динамики, обсуждавшихся в предыдущем параграфе, удовлетворяют этому условию. Непосредственно перенести в квантовую теорию уравнения (48) мы не можем, поскольку, как легко проверить, получившиеся уравнения не были бы инвариантны при общих линейных преобразованиях φ (27). Сначала мы должны привести уравнения (48) к стандартному виду. Преобразованием (27) мы образуем новый набор φ , скажем φ_0 , находящийся в таком взаимно однозначном

соответствии с t_a , что

$$[t_a, \varphi_a] = \delta_{aa'}, \quad (55)$$

Для таких φ уравнения (48) сводятся к

$$[g, \varphi_a] = \partial g / \partial t_a. \quad (56)$$

Эти уравнения уже можно перенести в квантовую теорию, и тогда они станут гейзенберговскими квантовыми уравнениями движения в нашей обобщенной динамике.

§ 12. Приложение

Доказательство тождества Пуассона для новых СП, определенных уравнением (36).

Воспользуемся индексами r, s, t, \dots для идентификации различных θ . Мы имеем по определению

$$\begin{aligned} & [[\xi, \eta]^*, \zeta]^* = [[\xi, \eta] + [\xi, \theta_r] c_{rs} [\theta_s, \eta], \zeta] + \\ & \quad + [[\xi, \eta] + [\xi, \theta_r] c_{rs} [\theta_s, \eta], \theta_t] c_{tu} [\theta_u, \zeta] = \\ & = [[\xi, \eta], \zeta] + [[\xi, \theta_r], \zeta] c_{rs} [\theta_s, \eta] + [\xi, \theta_r] [c_{rs}, \zeta] [\theta_s, \eta] + \\ & \quad + [\xi, \theta_r] c_{rs} [[\theta_s, \eta], \zeta] + [[\xi, \eta], \theta_t] c_{tu} [\theta_u, \zeta] + \\ & \quad + [[\xi, \theta_r], \theta_t] c_{rs} [\theta_s, \eta] c_{tu} [\theta_u, \zeta] + \\ & \quad + [\xi, \theta_r] [c_{rs}, \theta_t] [\theta_s, \eta] c_{tu} [\theta_u, \zeta] + \\ & \quad + [\xi, \theta_r] c_{rs} [[\theta_s, \eta], \theta_t] c_{tu} [\theta_u, \zeta]. \quad (57) \end{aligned}$$

Пусть оператор Σ означает суммирование по трем циклическим перестановкам величин ξ, η, ζ . Тогда мы должны доказать, что

$$\Sigma [[\xi, \eta]^*, \zeta]^* = 0.$$

В применении к первому члену (57) Σ дает нуль благодаря обычному тождеству Пуассона. Применение Σ ко второму, четвертому и пятому членам дает

$$\Sigma c_{rs} [\theta_s, \eta] \{ [[\xi, \theta_r], \zeta] + [[\theta_r, \zeta], \xi] + [[\zeta, \xi], \theta_r] \} = 0$$

снова благодаря обычному тождеству Пуассона. Применение к шестому и восьмому членам (57) дает, после циклической перестановки r, u, s, t в восьмом,

$$\begin{aligned} & c_{rs} c_{tu} \Sigma [\theta_s, \eta] [\theta_u, \zeta] \{ [[\xi, \theta_r], \theta_t] + [[\theta_t, \xi], \theta_r] \} = \\ & = -c_{rs} c_{tu} \Sigma [\theta_s, \eta] [\theta_u, \zeta] [[\theta_r, \theta_t], \xi]. \quad (58) \end{aligned}$$

Из (35) можем заключить, что

$$[c_{tu} [\theta_r, \theta_t], \xi] = 0,$$

или

$$[c_{tu}, \xi] [\theta_r, \theta_t] + c_{tu} [[\theta_r, \theta_t], \xi] = 0. \quad (59)$$

Таким образом, (58) сводится к

$$c_{rs}[\theta_r, \theta_t] \Sigma [\theta_s, \eta] [\theta_u, \zeta] [c_{tu}, \xi] = \Sigma [\theta_t, \eta] [\theta_u, \zeta] [c_{tu}, \xi]$$

после еще одного использования (35). Это выражение сокращается с результатом применения Σ к третьему члену (57). Применение Σ к остающемуся, седьмому члену (57) дает

$$[\xi, \theta_r] [\eta, \theta_s] [\zeta, \theta_u] \{c_{tu} [c_{rs}, \theta_t] + c_{tr} [c_{su}, \theta_t] + c_{ts} [c_{ur}, \theta_t]\}. \quad (60)$$

Обозначив Σ_{rsu} результат суммирования по циклическим перестановкам индексов r, s, u и одновременно индексов r', s', u' , мы имеем благодаря обычному тождеству Пуассона

$$\Sigma_{rsu} c_{rr'} c_{ss'} c_{uu'} [[\theta_{r'}, \theta_{s'}], \theta_{u'}] = 0. \quad (61)$$

Замена ξ на $\theta_{u'}$ в (59) дает

$$[c_{rr'}, \theta_{u'}] [\theta_{r'}, \theta_{s'}] + c_{rr'} [[\theta_{r'}, \theta_{s'}], \theta_{u'}] = 0,$$

так что из (61) следует

$$\Sigma_{rsu} c_{ss'} c_{uu'} [\theta_{r'}, \theta_{s'}] [c_{rr'}, \theta_{u'}] = 0.$$

С помощью (35) это сводится к

$$\Sigma_{rsu} c_{uu'} [c_{rs}, \theta_{u'}] = 0,$$

что свидетельствует об обращении (60) в нуль. На этом доказательство завершается. Все выписанные выше уравнения можно понимать как сильные, поскольку слабых уравнений в доказательстве не использовалось.

Ссылки

1. Dirac P. A. M. Homogeneous variables in classical dynamics // Proc. Camb. Phil. Soc.—1933.—V. 29.—P. 389.
2. Dirac P. A. M. Forms of relativistic dynamics¹⁾//Rev. Mod. Phys.—1949.—V. 21.—P. 392.

¹⁾ Статья 17 настоящего сборника.—Примеч. пер.

19. ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМА ПОЛЕВОЙ ДИНАМИКИ ¹⁾

Canadian Journal of Mathematics
vol. 3, № 1 (1951), pp. 1—23

THE HAMILTONIAN FORM OF FIELD DYNAMICS

P. A. M. DIRAC St. John's College, Cambridge

§ 1. Введение

В классической динамике обычно предполагалось, что если решены уравнения движения, то сделано все, что положено. Однако благодаря вызванному открытием квантовой механики углублению понимания общей динамической теории пришлось поверить в то, что это не так. По-видимому, необходимо сделать кое-что еще, а именно сгруппировать решения в семейства (при этом каждое семейство отвечает одной главной функции ²⁾), удовлетворяющей уравнению Гамильтона—Якоби). С точки зрения ньютоновой механики семейство ничем не выделено, но именно оно отвечает одному состоянию движения в квантовой теории, так что выделение семейств имеет некоторое, еще не достаточно понятое, глубокое значение в природе.

Значение семейства обнаруживается шредингеровой формой квантовой механики, но не гейзенберговой. Последняя, в прямой аналогии с классическими гамильтоновыми уравнениями движения, не требует никакой группировки решений. Шредингера форма идет дальше, подчеркивая важность концепции квантового состояния, удовлетворяющего принципу суперпозиции и описываемого решением волнового уравнения Шредингера. Для проведения аналогии с классической механикой эта концепция

¹⁾ Перевод с английского В. П. Павлова.

²⁾ Главная функция—первый интеграл уравнения Гамильтона—Якоби.—Примеч. пер.

вынуждает ввести семейство решений, причем само уравнение Шредингера оказывается аналогом уравнения Гамильтона — Якоби.

Релятивистскую динамическую теорию можно строить исходя из лоренц-инвариантной функции действия, зависящей от полевых величин. Требование, чтобы полное действие было стационарным при произвольных малых вариациях тех полевых величин, которые играют роль динамических координат во всех точках пространства-времени, приводит к релятивистскому набору уравнений поля, выступающих в качестве уравнений движения. Эти уравнения можно привести к гамильтонову виду, а затем перейти от них к гейзенберговой форме квантовой механики. Это уже сделано Вейсом¹⁾ [1]. В настоящей статье речь идет о дальнейшем математическом развитии схемы, связанном с группированием решений в семейства, что необходимо для перехода к шредингеровой форме квантовой механики.

Динамические переменные гамильтоновых уравнений движения быть набором переменных, способным служить начальными данными, — они должны быть независимы друг от друга и достаточны для фиксации состояния движения. В нерелятивистской теории в качестве них берут физические величины, относящиеся к фиксированному моменту времени. С релятивистской точки зрения концепция фиксированного момента времени выглядит несколько искусственно. Ее образом является плоская трехмерная поверхность в четырехмерном пространстве-времени такая, что направление ее нормали лежит внутри светового конуса. В релятивистской теории было бы естественнее заменить плоскую поверхность произвольной искривленной, но всюду пространственноподобной, т. е. потребовать, чтобы нормаль в каждой ее точке лежала внутри светового конуса. Тогда появляется возможность оперировать динамическими переменными, относящимися к физическим условиям на такой искривленной поверхности, как это сделал Вейс.

Конечно, использование искривленной поверхности вместо плоской повышает сложность математических уравнений. В реальных примерах всегда возвращаются к плоской поверхности, чтобы по возможности максимально упростить вычисления, тем более что именно плоской поверхности достаточно для описания всех эксперименталь-

¹⁾ Здесь ссылки приведены в конце статьи. — *Примеч. пер.*

ных результатов. Искривленная поверхность предпочтительнее в общей теории, куда она привносит гибкость описания и мощный математический аппарат. Она выделяет трансформационные свойства гамильтоновой теории в применении к полевой динамике. Искривленная поверхность имеет преимущества в любой задаче, нацеленной не на выяснение свойств данной системы, а на построение новой, поскольку она вносит в математику больше условий и тем самым сужает область поисков.

Искривленная поверхность будет описываться некоторыми математическими переменными, которые мы будем называть *переменными поверхностями*. (Фактически, как выяснится в следующем параграфе, они будут набором функций.) Уравнения движения будут задавать изменение динамических переменных при движении поверхности в пространстве-времени. Во время движения поверхность может испытывать произвольные изменения ориентации и деформации — лишь бы она всегда оставалась пространственноподобной. Таким образом, уравнения движения задают изменение динамических переменных при любом изменении переменных поверхности. Как было показано Вейсом, эти уравнения можно преобразовать из лагранжевой формы в гамильтонову, и тогда между динамическими переменными возникнут соотношения в скобках Пуассона (СП-соотношения).

Посмотрим теперь, что еще нужно сделать, чтобы оказалось возможным сгруппировать решения уравнений движения в семейства. Аналогия с нерелятивистской динамикой показывает, что семейства определяются решениями уравнения Гамильтона—Якоби, которое является дифференциальным уравнением первого порядка в частных производных как динамических координат, так и переменных поверхности. Таким образом, оно трактует переменные поверхности на равных правах с динамическими координатами. Это — решающее для нас обстоятельство. Мы должны привести динамическую теорию к виду, в котором переменные поверхности выступают на равной ноге с динамическими координатами. Должны существовать сопряженные им импульсы и СП-соотношения, связывающие их с остальными динамическими переменными. Сделав это, мы сможем сразу ввести уравнение Гамильтона—Якоби, а тем самым подготовить почву для шредингеровой формы квантования.

Теперь главным назначением уравнений движения следует считать управление совместным изменением всех дина-

мических переменных, включая переменные поверхности: если задать подходящие начальные условия, то все они окажутся функциями некоторой независимой переменной, скажем τ . При этом переменные поверхности могут зависеть от τ произвольным образом. Это следует учесть, полагая, что общее решение уравнений движения должно включать некоторые произвольные функции (или функционалы). Произвол в движении переменных поверхности следует тогда связать с «неожиданным» появлением этих произвольных функций в решении уравнений, которое, вообще-то, в нормальной ситуации фиксировало бы движение полностью.

Обобщение гамильтоновой динамики, необходимое для того, чтобы в решении уравнений движения могли появиться произвольные функции, было дано в предыдущей работе автора [2]. Настоящая статья есть прямое применение развитого там метода.

§ 2. Общая пространственноподобная поверхность

Пространство-время мы описываем четырьмя координатами x_μ ($\mu=0, 1, 2, 3$) прямолинейной ортогональной системы координат. Для простоты все векторы в этой координатной системе мы будем записывать в контравариантном виде, a_μ , и примем соглашение

$$a_\mu b_\mu = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3,$$

пользуясь им каждый раз, когда в произведении повторяется один из этих контравариантных индексов.

Общую трехмерную поверхность в пространстве-времени можно описать, задавая координаты x_μ любой точки на ней как функции трех параметров u_r ($r=1, 2, 3$):

$$x_\mu = y_\mu(u). \quad (1)$$

Это подразумевает введение параметризации u на поверхности. Параметризация не имеет физического содержания и привнесит некоторые дополнительные математические осложнения. Их можно обойти, используя другой метод описания поверхности: задавая x_0 как функцию x_1, x_2, x_3 . Однако это подпортит релятивистский способ обращения с четырьмя x . Ради сохранения релятивистской формы кажется предпочтительным использовать метод (1), а возникающие из-за параметризации дополнительные осложнения при должной аккуратности не так уж серьезны.

Это — тензор кривизны. Его можно представить в четырехмерной форме

$$\Omega_{-\mu-\nu} = y_{\mu r} y_{\nu s} \Omega^{rs} = y_{\mu r} y_{\nu s} l_{\sigma}^r y_{\sigma}^s = y_{\mu r} l_{\sigma}^r (g_{\nu\sigma} - l_{\nu} l_{\sigma}),$$

воспользовавшись (7). Теперь с помощью (9) получаем

$$\Omega_{-\mu-\nu} = y_{\mu r} l_{\nu}^r = l_{\nu-\mu}. \quad (11)$$

Мы можем сделать вывод, что

$$l_{\mu-\nu} = l_{\nu-\mu}. \quad (12)$$

§ 3. СП-соотношения

Переменные поверхности — это $y_{\mu}(u)$ из формулы (1), рассматриваемые как набор чисел, возникающий, когда μ и u принимают все допустимые значения. Их следует трактовать как динамические координаты. Поскольку область значений u непрерывна, эти динамические переменные дадут нам непрерывное множество степеней свободы вместо обычного дискретного набора. Формализм статьи [2] был предложен для динамической системы с дискретным набором степеней свободы, но заменой сумм на интегралы и δ -символа Кронекера на δ -функцию его можно сделать применимым к непрерывному случаю. Нужная нам δ -функция — это $\delta(u-u')$, обращающаяся в нуль для $u \neq u'$ и обладающая интегралом

$$\int \delta(u-u') d^3u = 1. \quad (13)$$

Заметим, что здесь при d^3u нет множителя Γ , так что эта δ -функция относится к параметризации поверхности, а не к метрике. Если ввести в (13) множитель Γ , то получилась бы δ -функция с более непосредственным физическим смыслом, но она не была бы столь удобной для динамической теории, поскольку не обладала бы нулевым и СП с вводимыми ниже переменными w .

У динамических переменных $y_{\mu}(u)$ есть сопряженные импульсы $w_{\mu}(u)$, причем выполняются стандартные СП-соотношения. Если для краткости писать y_{μ} , y'_{μ} вместо $y_{\mu}(u)$, $y_{\mu}(u')$ и аналогично w_{μ} , w'_{μ} вместо $w_{\mu}(u)$, $w_{\mu}(u')$, то эти соотношения примут вид

$$[y_{\mu}, y'_{\nu}] = 0, \quad [w_{\mu}, w'_{\nu}] = 0, \quad [y_{\mu}, w'_{\nu}] = g_{\mu\nu} \delta(u-u'). \quad (14)$$

Можно представить себе, что импульсы связаны со смещениями и деформациями параметризованной поверхности.

При этом линейной комбинации в $\int a_{\mu} w_{\mu} d^3u$, где a_{μ} зависит

от u , а v мал, отвечает смещение, при котором y_i переходит в $y_\mu + \epsilon a_\mu$ для всех значений u . Таким образом, начальная составляющая $w_\mu l_\mu = w$, связана с движением поверхности в направлении, нормальном к ней самой, а тангенциальные составляющие $w_\mu y_\mu{}^r = w^r$ — просто с изменениями параметризации.

Из фундаментальных СП-соотношений (14) можно вывести несколько полезных СП-соотношений, связывающих переменные w с функциями переменных поверхности и друг с другом. Некоторые из этих соотношений были получены ранее автором [3], исходящим из связи переменных w с деформациями, а также Чангом [4], использовавшим более непосредственный метод, аналогичный используемому ниже. Заметим, что Π^r , Π^s этих двух статей равны минус w^r , w_s настоящей статьи, а γ^{rs} , γ_{rs} в [3] равны минус γ^{rs} , γ_{rs} в настоящей статье.

При выводе СП следует прежде всего заметить, что все величины, зависящие только от поверхности и ее параметризации, являются функциями только динамических координат $y_\mu(u)$ и поэтому имеют нулевые СП друг с другом. Таким образом, y_μ , l_μ , $y_\mu{}^r$, Ω^{rs} для всех u и все их производные по u имеют нулевые СП друг с другом.

Из первого из уравнений (2) мы имеем

$$0 = [l_\mu y_\mu{}^r, w'_v] = [l_\mu, w'_v] y_\mu{}^r + l_\mu [y_\mu{}^r, w'_v].$$

Теперь

$$[y_\mu{}^r, w'_v] = [y_\mu, w'_v]^r = g_{\mu\nu} \delta^r(u - u'). \quad (15)$$

Следовательно,

$$[l_\mu, w'_v] y_\mu{}^r = -l_\nu \delta^r(u - u').$$

Далее, из второго из уравнений (2) получаем

$$0 = \frac{1}{2} [l_\mu l_\mu, w'_v] = [l_\mu, w'_v] l_\mu.$$

Тогда, ввиду (7),

$$[l_\lambda, w'_v] = [l_\mu, w'_v] (l_\mu l_\lambda + y_\mu{}^r y_\lambda{}^r) = -l_\nu y_\lambda{}^r \delta^r(u - u') = -l_\nu \delta_{-\lambda}(u - u'). \quad (16)$$

С помощью (15) мы имеем

$$[\gamma^{rs}, w'_v] = y_\mu{}^r [y_\mu{}^s, w'_v] + y_\mu{}^s [y_\mu{}^r, w'_v] = y_\nu{}^r \delta^s(u - u') + y_\nu{}^s \delta^r(u - u'). \quad (17)$$

Следуя методу, которым выведено (4), получаем

$$[\Gamma^s, w'_v] = \Gamma^s \gamma_{rs} [\gamma^{rs}, w'_v] = 2\Gamma^s \gamma_{rs} y_\nu{}^r \delta^s(u - u') = 2\Gamma^s y_{\nu s} \delta^s(u - u') = 2\Gamma^s \delta_{-v}(u - u'),$$

или

$$[\Gamma, \omega'_\nu] = \Gamma \delta_{-\nu} (u - u'). \quad (18)$$

Далее, из (17) имеем

$$\begin{aligned} [\gamma_{pr}, \omega'_\nu] \gamma^{rs} &= -\gamma_{pr} [\gamma^{rs}, \omega'_\nu] = \\ &= -y_{\nu p} \delta^s (u - u') - y_{\nu}^s \delta_p (u - u'), \end{aligned}$$

так что

$$[\gamma_{pr}, \omega'_\nu] = -y_{\nu p} \delta_r (u - u'). \quad (19)$$

Мы будем использовать добавление штрихованного индекса r' или $-\mu'$ к любой функции $X(u')$ в следующем смысле:

$$X^{r'} = \partial X / \partial u'_{r'}, \quad X_{r'} = \gamma_{rs}(u') X^s, \quad X_{-\mu'} = y'_{\mu r} X^{r'}. \quad (20)$$

Из (16) мы получаем

$$\begin{aligned} [l_\lambda, \omega'_\nu] &= -l'_\nu l_{\nu-\lambda} (u - u') = \\ &= -\{l'_\nu l_{\nu-\lambda} \delta (u - u')\}_{-\lambda} + l'_\nu l_{\nu-\lambda} \delta (u - u') = \\ &= -\{l_\nu l_{\nu-\lambda} \delta (u - u')\}_{-\lambda} + l_\nu l_{\nu-\lambda} \delta (u - u') = -\delta_{-\lambda} (u - u'). \quad (21) \end{aligned}$$

Опять-таки из (16) следует

$$\begin{aligned} [l_\lambda, \omega'^{r'}] &= -y'^{r'}_\nu l_{\nu-\lambda} (u - u') = \\ &= -\{y'^{r'}_\nu l_{\nu-\lambda} \delta (u - u')\}_{-\lambda} + y'^{r'}_\nu l_{\nu-\lambda} \delta (u - u') = \\ &= y_{\nu-\lambda}^r l_{\nu-\lambda} \delta (u - u') = y_{\nu-\lambda}^r l_{\lambda-\nu} \delta (u - u') = l_{\lambda}^r \delta (u - u'). \quad (22) \end{aligned}$$

Аналогично из (18) получаем

$$[\Gamma, \omega'_\nu] = l'_\nu \Gamma \delta_{-\nu} (u - u') = \Gamma \{l'_\nu \delta (u - u')\}_{-\nu} = \Gamma l_{\nu-\nu} \delta (u - u'), \quad (23)$$

и снова из (18)

$$\begin{aligned} [\Gamma, \omega'^{r'}] &= y'^{r'}_\nu \Gamma \delta_{-\nu} (u - u') = \Gamma \{y'^{r'}_\nu \delta (u - u')\}_{-\nu} = \\ &= \Gamma (y_{\nu-\nu}^r) \delta (u - u') + \Gamma y_{\nu-\nu}^r \delta_{-\nu} (u - u'). \end{aligned}$$

Теперь из (4)

$$\begin{aligned} (y_{\nu-\nu}^r)_\nu &= y_{\nu-\nu}^s y_{\nu-\nu}^p \gamma_{ps} = y_{\nu-\nu}^s y_{\nu-\nu}^p \gamma_{ps} = \\ &= \frac{1}{2} (y_{\nu-\nu}^s y_{\nu-\nu}^p)^r \gamma_{ps} = \frac{1}{2} \gamma^{psr} \gamma_{ps} = \Gamma^r / \Gamma. \quad (24) \end{aligned}$$

Следовательно,

$$[\Gamma, \omega'^{r'}] = \Gamma^r \delta (u - u') + \Gamma \delta^r (u - u') = \{\Gamma \delta (u - u')\}^r. \quad (25)$$

Чтобы получить СП для ω_i , ω^r , мы находим

$$\begin{aligned} [\omega_i, \omega'_\nu] &= [\omega_\mu l_\mu, \omega'_\nu l'_\nu] = \omega_\mu l'_\nu [l_\mu, \omega'_\nu] + l_\mu \omega'_\nu [\omega_\mu, l'_\nu] = \\ &= \omega_\mu [l_\mu, \omega'_\nu] + \omega'_\nu [\omega_\mu, l'_\nu]. \end{aligned}$$

Согласно (21) это равно

$$[w_i, w'_i] = -w_\mu \delta_{-\mu} (u - u') + w'_\nu \delta_{-\nu} (u - u'). \quad (26)$$

Далее, с помощью (22) получаем

$$[w_i, w'^r] = [w_\mu l_\mu, w'_\nu y_\nu^r] = w_\mu [l_\mu, w'^r] + l_\mu w'_\nu [w_\mu, y_\nu^r] = \\ = w_\mu l_\mu^r \delta (u - u') + l_\mu w'_\nu \delta^r (u - u').$$

Это дает

$$[w_i, w'^r] = w_\mu l_\mu^r \delta (u - u') + l_\mu \{w'_\nu \delta (u - u')\}^r = \{w_i \delta (u - u')\}^r. \quad (27)$$

Далее,

$$[w^r, w'^s] = [w_\mu y_\mu^r, w'_\nu y_\nu^s] = w_\mu y_\nu^s [y_\mu^r, w'_\nu] + \\ + [w_\mu, y_\nu^s] y_\mu^r w'_\nu = w_\mu y_\mu^s \delta^r (u - u') - w'_\mu y_\mu^r \delta^s (u - u') = \\ = w_\mu \{y_\mu^s \delta (u - u') + y_\mu^s \delta^r (u - u')\} - \\ - w'_\mu \{y_\mu^r \delta^s (u - u') + y_\mu^r \delta^s (u - u')\} = \\ = w^s \delta^r (u - u') - w'^r \delta^s (u - u'). \quad (28)$$

Еще несколько полезных соотношений получаются с помощью (7):

$$[y_{\mu s}, w'_\nu] = [\gamma_{rs} y_\mu^r, w'_\nu] = \gamma_{rs} g_{\mu\nu} \delta^r (u - u') - \\ - y_\mu^r \{y_{\nu r} \delta_s (u - u') + y_{\nu s} \delta_r (u - u')\} = \\ = l_\mu l_\nu \delta_s (u - u') - y_{\nu s} \delta_{-\mu} (u - u'); \quad (29)$$

$$[y_{\mu s}, w'^r] = y_\nu^r \{l_\mu l_\nu \delta_s (u - u') - y_{\nu s} y_{\mu\rho} \delta^\rho (u - u')\} = \\ = y_\nu^r l_\mu \{l_\nu \delta_s (u - u') - l_{\nu s} \delta (u - u')\} - \\ - y_{\mu\rho} y_{\nu s} \{y_\nu^r \delta^\rho (u - u') + y_\nu^r \delta^\rho (u - u')\} = \\ = -l_\mu l_\nu^r y_{\nu s} \delta (u - u') + y_{\mu\rho} y_\nu^r y_{\nu s} \delta (u - u') - \delta^r_s \delta_{-\mu} (u - u') = \\ = l_\mu l_\nu y_{\nu s}^r \delta (u - u') + y_{\mu\rho} y_\nu^r y_{\nu s} \delta (u - u') - \delta^r_s \delta_{-\mu} (u - u') = \\ = y_{\mu s}^r \delta (u - u') - \delta_s^r \delta_{-\mu} (u - u'). \quad (30)$$

§ 4. Изменения параметризации

Используя для динамических уравнений формулировку с однородностью по скоростям, мы имеем гамильтониан, общий вид которого описывается уравнением (20) статьи [2] (см. с. 31). Здесь φ — функции динамических координат и импульсов, а v зависят от производных по τ тех величин, которые могут произвольно меняться с изменением τ . У нашей теперешней динамической системы произвольным образом зависеть от τ могут переменные поверхности $y_\mu(u)$, и в качестве v мы можем взять их производные по τ .

Вообще говоря, в качестве u мы могли бы взять любой полный набор независимых функций от y_μ ; получилась бы эквивалентная, но менее удобная формулировка.) Если они — единственные произвольным образом зависящие от t величины, то их производные по t — единственные u , и гамильтониан имеет вид

$$H \equiv \int \dot{y}_\mu \varphi_\mu(u) d^3u, \quad (31)$$

где $\varphi_\mu(u)$ — некоторые функции динамических координат и импульсов, слабо равные нулю для всех значений u . Если произвольным образом могут зависеть от t и другие величины, то в гамильтониане появятся дополнительные члены. Условимся пока их не рассматривать, поскольку они не повлияют на развиваемую сейчас аргументацию.

Благодаря (6) мы можем переписать (31) через нормальные и тангенциальные компоненты y_μ и φ_μ ,

$$H \equiv \int \dot{y}_i \varphi_i d^3u + \int \dot{y}_r \varphi^r d^3u. \quad (32)$$

Теперь φ_i и φ^r — функции динамических координат и импульсов, слабо равные нулю.

Согласно уравнению (21) статьи [2] уравнение движения для произвольной динамической переменной g имеет вид

$$\dot{g} = \int \dot{y}_\mu [g, \varphi_\mu] d^3u, \quad (33)$$

или

$$\dot{g} = \int \dot{y}_i [g, \varphi_i] d^3u + \int \dot{y}_r [g, \varphi^r] d^3u. \quad (34)$$

Здесь второй член описывает изменение g при условии, что $\dot{y}_i = 0$, т. е. когда сама поверхность не движется, а меняется только ее параметризация. Таким образом, для малых изменений параметризации

$$dg = \int (dy)_r [g, \varphi^r] d^3u. \quad (35)$$

Малое изменение параметризации есть

$$u_r \rightarrow u_r + \varepsilon a_r, \quad (36)$$

и означает, что точка на поверхности с параметрами u_r становится точкой с параметрами $u_r + \varepsilon a_r$, где a_r зависит от u , а ε — малое число. Это дает для изменения $y_\mu(u)$:

$$dy_\mu = y_\mu(u + \varepsilon a) - y_\mu(u) = \varepsilon y_{\mu r} a_r,$$

откуда

$$(dy)_r = y_{\mu r} dy_\mu = \varepsilon a_r.$$

Таким образом, изменение g при таком изменении параметризации есть

$$dg = \varepsilon \int a_r [g, \varphi^r] d^3u = \quad (37)$$

$$= \varepsilon \left[g, \int a_r \varphi^r d^3u \right], \quad (37')$$

поскольку $\varphi^r = 0$. Ответ (37) или (37') остается верным, даже если a_r зависит от любых динамических переменных. Теперь мы видим, почему важны φ^r : их СП с любой динамической переменной дает изменение этой переменной при изменении параметризации.

Величину, отнесенную к точке u' на поверхности и инвариантную при любом изменении параметризации, оставляющем точку u' на месте, я называю u -скаляром в точке u' . Величину, инвариантную при любых произвольных изменениях параметризации, я называю u -инвариантом. Понятия u -скаляра и u -инварианта относятся только к зависимости от u -преобразований, а не к тому, как ведет себя величина при преобразованиях Лоренца; u -скаляр и u -инвариант вполне могут оказаться компонентами вектора или тензора, если речь вдруг пойдет о преобразованиях Лоренца.

Теперь $y_\mu(u')$ для данного значения μ — очевидно, u -скаляр в u' . То же можно сказать о $l_\mu(u')$. Любая функция u -скаляров в u' есть u -скаляр в u' . Если $S(u')$ — любой u -скаляр в u' , то $\int S(u') \Gamma^s d^3u'$ — u -инвариант.

Пусть $S(u)$ — u -скаляр в u . При изменении параметризации (36) он перейдет в тот же самый u -скаляр в $u + \varepsilon a$, р именно в $S(u + \varepsilon a)$, так что

$$dS = S(u + \varepsilon a) - S(u) = \varepsilon a_r S^r.$$

Таким образом, из (37):

$$a_r S^r = \int a_r [S, \varphi^r] d^3u'.$$

Поскольку функции $a_r(u)$ произвольны, мы можем заключить, что

$$[S, \varphi^r] = S^r \delta(u - u'). \quad (38)$$

Именно это уравнение выражает условие того, что S есть u -скаляр в u .

Пусть Q — u -инвариант. Из (37) мы видим, что

$$[Q, \varphi^r] = 0 \quad (39)$$

должно выполняться для всех u' . Положив $Q = \int S \Gamma d^3u$, мы получаем

$$\begin{aligned} \int S [\Gamma, \varphi'^r] d^3u &= - \int \Gamma [S, \varphi'^r] d^3u = - \int \Gamma S^r \delta(u - u') d^3u = \\ &= \int S \{\Gamma \delta(u - u')\}^r d^3u. \end{aligned}$$

Поскольку это должно выполняться для любого u -скаляра S , мы видим, что

$$[\Gamma, \varphi'^r] = \{\Gamma \delta(u - u')\}^r. \quad (40)$$

Предположим, что после интегрирования уравнений движения полевая величина $V(x)$ принимает определенные значения в каждой точке x пространства-времени. Значения $V(x)$ на поверхности дадут нам ∞^3 чисел, которые можно «перенумеровать» параметрами u и задать таким образом функцию $V(u)$. Величины $V(u)$ для всех значений u будут динамическими переменными, обладающими нулевыми СП со всеми переменными y и w , так что

$$[y_\mu, V'] = 0, \quad [w_\mu, V'] = 0. \quad (41)$$

Они могут быть динамическими координатами, и в этом случае будут нулевыми их СП друг с другом:

$$[V, V'] = 0. \quad (42)$$

Тогда будут существовать динамические переменные, скажем $U(u)$, образующие набор сопряженных к $V(u)$ импульсов и удовлетворяющие СП-соотношениям

$$\begin{aligned} [y_\mu, U'] &= 0, \quad [w_\mu, U'] = 0, \\ [U, U'] &= 0, \quad [V, U'] = \delta(u - u'). \end{aligned} \quad (43)$$

По своему физическому смыслу $V(u)$ не должны зависеть от изменений параметризации, сохраняющих точку u , т. е. должны быть u -скалярами в u . Однако сопряженный импульс $U(u)$ — уже не u -скаляр, поскольку $\delta(u - u')$ в (43) зависит от параметризации. Чтобы для V могло удовлетвориться условие (38) u -скалярности, должно быть

$$\varphi^r \equiv UV^r + \varphi^{r+}, \quad (44)$$

где φ^{r+} обладает нулевой СП со всеми V . Мы можем считать, что φ^{r+} имеет нулевую СП и со всеми U ; это — простейшее предположение, ведущее к самосогласованной схеме. Тогда

$$[U, \varphi'^r] = U' [U, V'^r] = U' \delta^r(u - u') = \{U \delta(u - u')\}^r. \quad (45)$$

Теперь из (40) мы получаем

$$[U\Gamma^{-1}, \varphi^r] = \{U\delta(u-u')\}^r \Gamma^{-1} - U\Gamma^{-2} \{\Gamma\delta(u-u')\}^r = \\ = \{U\Gamma^{-1}\}^r \delta(u-u')$$

что в соответствии с (38) показывает, что $U\Gamma^{-1}$ есть u -скаляр в u . Сам U мы можем назвать u -скалярной плотностью. Утверждение, что u -скалярной полевой величине динамически сопряжена u -скалярная плотность, ранее было получено Чангом [4].

Будучи u -скалярами, динамические координаты $y_\mu(u)$ могут быть обработаны тем же способом, что и $V(u)$ выше. В соответствии с (44) мы можем заключить, что,

$$\varphi^r \equiv \omega_\mu y_\mu^r + \varphi^{r*} \equiv \omega^r + \varphi^{r*}, \quad (46)$$

где φ^{r*} обладает нулевой СП со всеми y . Мы можем считать, что у φ^{r*} нулевая СП и со всеми ω . Непротиворечивость этого предположения легко проверяется. Таким образом, задав φ^r формулой (46), мы видим, что СП-соотношение (22) приводит к условию u -скалярности l_λ (уравнению (38) с l_λ в качестве S); СП-соотношение (25) приводит к (40); наконец,

$$[\omega_\nu, \varphi^r] = \omega'_\mu g_{\mu\nu} \delta^r(u-u') = \{\omega_\nu \delta(u-u')\}^r$$

показывает, что ω_ν является u -скалярной плотностью.

Для динамической системы, единственными динамическими координатами которой служат y и некоторое число полевых функций $V_a(u)$ ($a=1, 2, \dots$), сопряженными импульсными переменными будут ω и $U_a(u)$, а φ^r примут вид

$$\varphi^r \equiv \omega^r + \sum_a U_a V_a^r, \quad (47)$$

если пренебречь несущественными членами, имеющими нулевые СП со всеми динамическими переменными.

Если $S(u)$ — u -скаляр в u , мы должны ожидать, что $S_{-\mu} = y_{\mu r} S^r$ — также u -скаляр в u , поскольку его конструкция из $S(u)$ не зависит от параметризации. Формальное доказательство этого результата проводится следующим образом. Мы начинаем с условия (38) для $S(u)$. Дифференцируя обе части этого уравнения по u_s , мы получаем

$$[S^s, \varphi^r] = S^{rs} \delta(u-u') + S^r \delta^s(u-u').$$

Таким образом, из (30) имеем

$$\begin{aligned} y_{\mu s} [S^s, \varphi'^r] &= \\ &= \{(S^s y_{\mu s})^r - S^s y_{\mu s}^r\} \delta(u - u') + S^r y_{\mu s} \delta^s(u - u') = \\ &= \{(S_{-\mu})^r - S^s y_{\mu s}^r\} \delta(u - u') + S^r \delta_{-\mu}^s(u - u') = \\ &= (S_{-\mu})^r \delta(u - u') - S^s [y_{\mu s}, \varphi'^r]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$[S_{-\mu}, \varphi'^r] = y_{\mu s} [S^s, \varphi'^r] + S^s [y_{\mu s}, \varphi'^r] = (S_{-\mu})^r \delta(u - u'),$$

что и есть условие u -скалярности для $S_{-\mu}$.

§ 5. Переход от лагранжиана к гамильтониану

Рассмотрим динамическую систему, для которой плотность действия \mathcal{L} в пространстве-времени есть функция некоторых полевых переменных V и их первых производных $\partial V / \partial x_\mu = V_{,\mu}$,

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(V, V_{,\mu}).$$

Для краткости в уравнениях этого параграфа будет выписываться только одна V . Тогда действие есть

$$I \equiv \int \mathcal{L} d^4x.$$

Элемент четырехмерного «объема» пространства-времени d^4x можно представить в виде произведения элемента трехмерной «площади» поверхности, Γd^3u , и элемента расстояния по нормали к поверхности, $l_\mu \dot{y}_\mu d\tau = \dot{y}_l d\tau$. Тогда

$$I \equiv \int \int \mathcal{L} \dot{y}_l \Gamma d^3u d\tau,$$

так что лагранжиан есть

$$L \equiv dI/d\tau \equiv \int \mathcal{L} \dot{y}_l \Gamma d^3u. \quad (48)$$

Теперь этот лагранжиан будет рассмотрен в соответствии с общим методом статьи [2], и из него будет получен гамильтониан. При этом все уравнения § 2 и 3 можно использовать как сильные уравнения.

Сначала мы должны выразить L через динамические координаты и скорости, переменные q и \dot{q} статьи [2]. Переменные $y_\mu(u)$, $V(u)$ суть q . Тангенциальные производные $y_{,\mu}$ и $V_{,\mu}$, такие как y_{μ}^r , V^r , $V_{-\mu}$, являются функциями q . Не чисто тангенциальные производные, такие как $V_{,\mu}$, зависят не только от q , но могут быть

представлены как функции q и \dot{q} . Из (5) мы имеем

$$\dot{V} \equiv V_v \dot{y}_v \equiv (V_l l_\mu + V_{-\mu}) \dot{y}_\mu.$$

Таким образом,

$$V_l \equiv (\dot{V} - V_{-v} \dot{y}_v) / \dot{y}_l, \quad (49)$$

так что

$$V_\mu \equiv V_{-\mu} + l_\mu V_l \equiv V_{-\mu} + l_\mu (\dot{V} - V_{-v} \dot{y}_v) / \dot{y}_l. \quad (50)$$

Здесь V_μ выражены через \dot{V} и \dot{y}_μ , имеющие смысл q и $V_{-\mu}$, l_μ , являющиеся функциями q . Теперь L стал функцией q и \dot{q} . Заметим, что V_μ однородны нулевой степени по скоростям, так что L однороден первой степени по скоростям, как и требуется для формулировки динамических уравнений с однородностью по скоростям.

Варьируя \dot{q} и оставляя постоянными q , мы получаем из (50):

$$\begin{aligned} \delta V_\mu &= l_\mu (\delta \dot{V} - V_{-v} \delta \dot{y}_v) / \dot{y}_l - l_\mu (\dot{V} - V_{-v} \dot{y}_v) \delta \dot{y}_l / \dot{y}_l^2 = \\ &= l_\mu (\delta \dot{V} - V_{-v} \delta \dot{y}_v) / \dot{y}_l, \end{aligned}$$

снова воспользовавшись (50). Тогда вариация L , заданного формулой (48), есть

$$\begin{aligned} \delta L &= \int \{ \partial \mathcal{L} / \partial V_\mu \cdot \delta V_\mu \dot{y}_l + \mathcal{L} \delta \dot{y}_l \} \Gamma d^3 u = \\ &= \int \{ \partial \mathcal{L} / \partial V_\mu \cdot l_\mu (\delta \dot{V} - V_{-v} \delta \dot{y}_v) + \mathcal{L} l_v \delta \dot{y}_v \} \Gamma d^3 u. \quad (51) \end{aligned}$$

Из определения импульсов $w_\mu(u)$, $U(u)$, сопряженных соответственно $y_\mu(u)$ и $V(u)$. (уравнение (2) статьи [2] в применении к непрерывному множеству степеней свободы), мы имеем

$$\delta L = \int \{ w_v \delta \dot{y}_v + U \delta \dot{V} \} d^3 u. \quad (52)$$

Сравнивая (51) с (52), находим

$$U = \partial \mathcal{L} / \partial V_\mu \cdot l_\mu \Gamma, \quad (53)$$

$$w_v = - \partial \mathcal{L} / \partial V_\mu \cdot l_\mu V_v \Gamma + \mathcal{L} l_v \Gamma = -UV_v + \mathcal{L} l_v \Gamma. \quad (54)$$

Это — слабые уравнения, выражающие импульсы через q и \dot{q} .

Следуя методу статьи [2], мы исключим \dot{q} из уравнений (53) и (54) с тем, чтобы получить слабые уравнения, содержащие только p (т. е. w и U) и q . Это — ф-уравнения. Уравнение (54) лучше всего разбить на нормальную

составляющую, домножив его на l_ν ,

$$w_i + UV_i - \mathcal{L}\Gamma = 0, \quad (55)$$

и тангенциальную составляющую, домножив на y_ν^r ,

$$w^r + UV^r = 0. \quad (56)$$

В (56) нет \dot{q} , так что уже само (56) есть ϕ -уравнение. Его левая часть есть как раз ϕ^r из формулы (47), связанная с изменением параметризации, причем знак суммирования в (56) подразумевается.

Уравнения (53) и (55) содержат производные V_μ , которые можно выразить через $V_{-\mu}$ и V_i . Тогда \dot{q} появляются в (53) и (55) только через V_i , т. е. благодаря (49) только в комбинации $(\dot{V} - V_{-\nu}y_\nu)/y_i$.

Для многих динамических систем (см. ниже, пример 1) уравнения (53) можно решить — одно такое уравнение имеется для каждой полевой функции V , — получив все V_i как функции U и q . Этот случай мы будем называть стандартным случаем полевой динамики; ему отвечает ситуация обычной динамики с однородностью по скоростям, в которой все отношения скоростей могут быть выражены через p и q .

В стандартном случае нельзя получить ϕ -уравнений из одних только уравнений (53), хотя в других случаях это сделать можно. В стандартном случае ϕ -уравнения можно получить из (55) с помощью (53), а именно в виде

$$w_i + \mathcal{H} = 0, \quad (57)$$

где \mathcal{H} — результат подстановки в $UV_i - \mathcal{L}\Gamma$ выражения V_i через U и q , взятого из (53). Тогда единственными ϕ -уравнениями будут уравнения (57) и (56), взятые для всех i . В других случаях, как будет показано ниже, из (55) с помощью (53) можно все еще получить ϕ -уравнение типа (57). Оно вместе с (56) и ϕ -уравнениями, следующими только из (53), образует тогда полную совокупность ϕ -уравнений.

Вариацией интеграла действия обычным образом получают уравнения поля

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V}. \quad (58)$$

Их следует проанализировать на предмет того, не дадут ли они каких-либо уравнений только между p и q . Такие уравнения были бы χ -уравнениями. С помощью (7) и (53)

уравнение (58) можно записать в виде

$$\frac{l_{\mu}}{\Gamma} \left\{ \frac{\partial U}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{\nu}} \frac{\partial (l_{\nu} \Gamma)}{\partial x_{\mu}} \right\} + y_{\nu r} \frac{\partial}{\partial u_r} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{\nu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V}, \quad (59)$$

и, таким образом, оно содержит нормальную производную U . В стандартном случае все U — независимые функции скоростей, и их нормальные производные нельзя исключить из (59), так что χ -уравнений не может быть. Однако в других случаях вполне могут быть χ -уравнения (см. примеры 2 и 3 ниже).

Получив все ϕ и χ , мы должны посмотреть, какие из них первого рода, т. е. имеют нулевые СП со всеми ϕ и χ . Это всегда можно выяснить, вычисляя СП с помощью результатов § 3; однако о принадлежности некоторых ϕ к первому роду можно заключить легче, увидев, что, появившись в гамильтониане, они дают начало произвольным функциям в общем решении уравнений движения.

По определению (5) статьи [2] гамильтониан есть

$$H \equiv \int (\omega_{\mu} \dot{y}_{\mu} + UV - \mathcal{L} \dot{y}_i \Gamma) d^3u. \quad (60)$$

Его можно представить в виде

$$\begin{aligned} H &\equiv \int \{ \omega^r \dot{y}_r + \omega_i \dot{y}_i + U (V_i l_{\nu} - V_{-\nu}) \dot{y}_{\nu} - \mathcal{L} \dot{y}_i \Gamma \} d^3u \equiv \\ &\equiv \int \{ \dot{y}_i (\omega_i + UV_i - \mathcal{L} \Gamma) + \dot{y}_r (\omega^r + UV^r) \} d^3u \equiv \\ &\equiv \int \dot{y}_i (\omega_i + UV_i - \mathcal{L} \Gamma) d^3u + \int \dot{y}_r \varphi^r d^3u, \end{aligned} \quad (61)$$

где φ^r заданы уравнением (47) и подразумевается знак суммирования. Согласно общей теории статьи [2] H должен в сильном смысле равняться линейной комбинации ϕ первого рода типа (31) или (32), с добавочными слагаемыми, если помимо переменных поверхности $y_{\mu}(u)$ имеются другие величины, способные произвольно зависеть от t . В (61) и (32) стоят одни и те же φ^r , так что мы можем заключить, что они должны быть первого рода. Наличие в H этих ϕ первого рода приводит к произвольным изменениям параметризации во время движения.

В стандартном случае единственным ϕ -уравнением помимо φ^r -уравнений (56) является уравнение (57). Поэтому (57) должно быть тождественным с уравнением $\phi_i = 0$. Мы можем заключить, что левая часть (57) должна быть первого рода, а также что уравнение

$$\mathcal{H} \equiv UV_i - \mathcal{L} \Gamma, \quad (62)$$

необходимое, чтобы первый член в (61) перешел в первый член правой части (32), выполняется в сильном смысле, а не только в слабом, как это мы знали ранее. Далее, мы можем заключить, что в стандартном случае в H нет добавочных членов помимо одного, появляющегося в (32), так что, помимо переменных поверхности, нет иных величин, которые могут произвольным образом зависеть от t .

В других случаях должно быть еще одно φ -уравнение (57), выводимое из (55) с помощью (53) такое, чтобы его левая часть могла быть φ первого рода, чье присутствие в H приводило бы к произвольному движению поверхности, нормальному ей самой. Уравнение (62) сохраняет свой сильный смысл, если в H нет дополнительных членов (см. пример 2 ниже). Однако если в H имеются дополнительные члены, как это случается, когда имеются выводимые только из (53) φ -уравнения с φ первого рода, — первый член в (61) более не совпадает в сильном смысле с первым членом правой части (32), и поэтому (62) больше не выполняется в сильном смысле. Тогда \mathcal{H} не определяется однозначно, поскольку к нему можно добавить любую линейную комбинацию φ первого рода, получающихся только из (53) (см. пример 3 ниже).

Чтобы подготовить теорию к квантованию, мы должны, как это обсуждалось в § 8 статьи [2], разделить все φ и χ на величины первого и второго рода, а затем перепределением СП превратить все уравнения для величин второго рода в сильные уравнения. Далее, мы должны превратить χ первого рода в φ первого рода, добавив их к гамильтониану с произвольными коэффициентами. Это изменение принесет лишь увеличение количества решений уравнений движения, но не повлияет на уже существующие решения (см. пример 3 ниже, где обсуждается физический смысл такого изменения).

Теперь мы остаемся с набором слабых φ -уравнений первого рода, из которых мы можем получить уравнения Гамильтона—Якоби, положив каждую импульсную переменную p равной $\partial S/\partial q$, так что они становятся дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка для S . Их взаимная совместимость следует из условий принадлежности первому роду. Каждое из их решений дает семейство решений уравнений движения.

Теперь переход к квантовой теории можно сделать в соответствии с правилами § 11 статьи [2]. Каждое из слабых φ -уравнений первого рода дает одно волновое уравнение Шредингера.

Пример 1. Скалярное мезонное поле. Теперь согласно методу настоящей статьи будут разобраны несколько простых примеров, чтобы проиллюстрировать различные черты теории. Начнем со скалярного мезонного поля. В этом примере есть одна полевая функция V , лоренцев скаляр, а плотность действия

$$\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2} V_{\mu} V_{\mu} - \frac{1}{2} m^2 V^2, \quad (63)$$

где m — константа.

Уравнение (53) дает для импульса U

$$U = V_{\mu} l_{\mu} \Gamma. \quad (64)$$

Это уравнение можно решить, выразив V_i через U и q , так что мы имеем стандартный случай. Таким образом, χ -уравнений не может быть, а единственной ϕ , помимо ϕ^r , будет (57). Чтобы получить здесь \mathcal{H} , заметим, что (62) и (63) дают

$$\mathcal{H} \equiv UV_i - \frac{1}{2} (V_i V_i + V_{-\mu} V_{-\mu} - m^2 V^2) \Gamma.$$

Из слабого уравнения (64) мы можем вывести сильное уравнение

$$0 \equiv \frac{1}{2} (U - V_i \Gamma)^2 \Gamma^{-1}.$$

Добавляя его к предыдущему уравнению, мы получаем

$$\mathcal{H} \equiv \frac{1}{2} U^2 \Gamma^{-1} - \frac{1}{2} (V_{-\mu} V_{-\mu} - m^2 V^2) \Gamma. \quad (65)$$

Нормальная производная V_i исчезла из этого выражения для \mathcal{H} , так что оно, содержа только U и q , пригодно, чтобы фигурировать в ϕ -уравнении (57).

Приведенный выше вывод \mathcal{H} показывает, что можно исключить V_i из правой части (62), пользуясь только сильными уравнениями. Это подтверждает, что уравнение (62) для \mathcal{H} — сильное, как то и необходимо в стандартном случае.

Пример 2. Векторное мезонное поле. Предположим, что четыре полевые функции V образуют лоренцев вектор A_{μ} , и возьмем плотность действия в виде

$$\mathcal{L} \equiv -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_{\mu} A_{\mu}, \quad (66)$$

где

$$F_{\mu\nu} \equiv A_{\nu\mu} - A_{\mu\nu}, \quad A_{\nu\mu} \equiv \partial A_{\nu} / \partial x^{\mu}.$$

В рассмотрении этой задачи возникают значительные различия в зависимости от того, равна константа m нулю или нет. В настоящем примере мы ограничимся отличной от нуля m .

Пусть B_μ — импульс, сопряженный A_μ , а его знак определен так, что

$$[A_\mu, B'_\nu] \equiv g_{\mu\nu} \delta(u - u'). \quad (67)$$

Тогда (53) дает

$$B_\nu = F_{\nu\mu} l_\mu \Gamma. \quad (68)$$

Мы можем заключить, что

$$B_l \equiv l_\nu B_\nu = 0. \quad (69)$$

Это уравнение содержит только p и q , так что представляет собой φ -уравнение. Отсюда следует, что этот случай не стандартный. Легко видеть, что только из (68) не выводится больше никаких φ -уравнений, так что остальными φ -уравнениями будут только (56), которые сейчас имеют вид

$$\varphi^r \equiv \omega^r + B_\mu A'_\mu = 0, \quad (70)$$

и (57), которым мы займемся ниже.

Уравнения поля (58) дают

$$(F_{\nu\mu})_\mu = m^2 A_\nu. \quad (71)$$

Дифференцированием по x_ν , используя условие $m \neq 0$, мы можем вывести, что

$$A_{\nu\nu} = 0. \quad (72)$$

Кроме того,

$$(F_{\nu\mu})_{-\mu} = -l_\mu l_\sigma (F_{\nu\mu})_\sigma + m^2 A_\nu,$$

так что с учетом (12)

$$(l_\nu F_{\nu\mu})_{-\mu} = l_{\nu-\mu} F_{\nu\mu} + l_\nu (F_{\nu\mu})_{-\mu} = m^2 A_l.$$

Теперь из (68)

$$l_\nu F_{\nu\mu} = -B_\mu \Gamma^{-1} = -B_{-\mu} \Gamma^{-1},$$

так что мы получаем

$$(B_{-\mu} \Gamma^{-1})_{-\mu} + m^2 A_l = 0. \quad (73)$$

Это уравнение содержит только p и q и поэтому является χ -уравнением.

Легко видеть, что B_l имеет нулевую СП с первым членом (73), но не со вторым, благодаря $m \neq 0$. Таким

образом, B_i должна быть ϕ второго рода, а (73) — χ второго рода. Таким образом, помимо ϕ' и ϕ_i нет ϕ первого рода, так что в H нет других дополнительных членов, кроме появляющегося в (32). Следовательно, уравнение (62) выполняется в сильном смысле, т. е.

$$\mathcal{H} \equiv B_\mu A_{\mu i} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \Gamma - \frac{1}{2} m^2 A_\mu A_\mu \Gamma. \quad (74)$$

Теперь мы можем получить \mathcal{H} как функцию p и q , исключив из (74) нормальную производную от A_μ . При этом мы должны заботиться о том, чтобы пользоваться только сильными уравнениями, — иначе можно заработать в выражении для \mathcal{H} дополнительные члены с B_i в качестве множителей. (57) с такими дополнительными членами в \mathcal{H} осталось бы корректным ϕ -уравнением, но его левая часть не была бы величиной первого рода и не совпадала бы с ϕ_i , фигурирующим в H .

Пусть $F_{-\mu-\nu}$ — тангенциальная составляющая $F_{\mu\nu}$, определяемая, в соответствии с естественным обобщением (5), формулой

$$F_{-\mu-\nu} \equiv F_{\mu\nu} - l_\nu F_{\mu i} - l_\mu F_{i\nu}, \quad (75)$$

где

$$F_{\mu i} \equiv -F_{i\mu} \equiv l_\sigma F_{\mu\sigma}.$$

Подставляя в (75)

$$F_{\mu\nu} \equiv A_{\nu-\mu} - A_{\mu-\nu} + l_\mu A_{\nu i} - l_\nu A_{\mu i},$$

$$F_{\mu i} \equiv l_\sigma A_{\sigma-\mu} + l_\sigma l_\mu A_{\sigma i} - A_{\mu i},$$

после некоторых преобразований мы получаем

$$F_{-\mu-\nu} \equiv A_{\nu-\mu} - A_{\mu-\nu} + l_\sigma (l_\mu A_{\sigma-\nu} - l_\nu A_{\sigma-\mu}). \quad (76)$$

Поскольку нормальная производная A_μ здесь не появляется, $F_{-\mu-\nu}$ зависит только от p и q .

Мы имеем из (75)

$$F_{-\mu-\nu} F_{-\mu-\nu} \equiv F_{\mu\nu} F_{-\mu-\nu} \equiv F_{\mu\nu} - 2F_{\mu i} F_{\mu i}. \quad (77)$$

Тогда (74) принимает вид

$$\mathcal{H} \equiv B_\mu A_{\mu i} + \frac{1}{2} F_{-\mu-\nu} F_{-\mu-\nu} \Gamma + \frac{1}{2} F_{\mu i} F_{\mu i} \Gamma - \frac{1}{2} m^2 A_\mu A_\mu \Gamma. \quad (78)$$

Из (68) мы получаем сильное уравнение

$$Q \equiv -\frac{1}{4} (B_\mu - F_{\mu i} \Gamma) (B_\mu - F_{\mu i} \Gamma) \Gamma^{-1},$$

Добавляя его к (78), мы получаем

$$\mathcal{H} \equiv B_{\mu} l_{\nu} A_{\nu\mu} - \frac{1}{2} B_{\mu} B_{\mu} \Gamma^{-1} + \frac{1}{4} F_{-\mu-\nu} F_{-\mu-\nu} \Gamma - \frac{1}{2} m^2 A_{\mu} A_{\mu} \Gamma. \quad (79)$$

Уравнение (72) можно записать в виде

$$l_{\nu} A_{\nu i} + A_{\nu-\nu} = 0. \quad (80)$$

Из него мы можем вывести сильное уравнение

$$B_i (l_{\nu} A_{\nu i} + A_{\nu-\nu}) \equiv 0$$

и, следовательно,

$$B_{\mu} l_{\nu} A_{\nu\mu} \equiv B_{\mu} l_{\nu} A_{\nu-\mu} + B_i l_{\nu} A_{\nu i} \equiv B_{-\mu} l_{\nu} A_{\nu-\mu} - B_i A_{\nu-\nu}.$$

Таким образом, (79) принимает вид

$$\mathcal{H} \equiv B_{-\mu} l_{\nu} A_{\nu-\mu} - B_i A_{\nu-\nu} - \frac{1}{2} B_{\mu} B_{\mu} \Gamma^{-1} + \frac{1}{4} F_{-\mu-\nu} F_{-\mu-\nu} \Gamma - \frac{1}{2} m^2 A_{\mu} A_{\mu} \Gamma. \quad (81)$$

Теперь нормальная производная A_{μ} исчезла, и мы имеем для \mathcal{H} корректное выражение, годное для подстановки в (57).

Чтобы приспособить теорию к квантованию, мы должны методом раздела 8 статьи [2] так переопределить СП, чтобы уравнения (69) и (73) для ϕ и χ второго рода выполнялись в сильном смысле. Возьмем в качестве θ статьи [2] левые части (69) и (73). Таким образом, для каждого значения u имеются две θ , скажем

$$\theta \equiv (B_{-\mu} \Gamma^{-1})_{-\mu} + m^2 A_i, \quad \theta^+ \equiv B_i. \quad (82)$$

Их СП имеет вид

$$[\theta, \theta'] \equiv 0, \quad [\theta^+, \theta^{+'}] \equiv 0, \quad [\theta, \theta^{+'}] \equiv m^2 \delta(u - u').$$

Коэффициенты c должны определяться из уравнения (35) статьи [2], причем сумма по s интерпретируется как сумма по θ и θ^+ вместе с интегрированием по всем значениям u . Решение будет следующим: c , связанный с $\theta(u)$ и $\theta^+(u')$, равен $m^{-2} \delta(u - u')$, а остальные c обращаются в нуль. Тогда формула (36) статьи [2] дает, при той же, что и выше, интерпретации сумм по s и s' :

$$[\xi, \eta]^* \equiv [\xi, \eta] + m^{-2} \int [\xi, (B_{-\mu} \Gamma^{-1})_{-\mu} + m^2 A_i] [B_i, \eta] d^3 u - m^{-2} \int [\xi, B_i] [(B_{-\mu} \Gamma^{-1})_{-\mu} + m^2 A_i, \eta] d^3 u. \quad (83)$$

Новое определение СП делает нулевыми СП величин B_i и $(B_{-\mu}\Gamma^{-1})_{-\mu} + m^2 A_i$, с чем угодно, так что можно положить их равными нулю в сильном смысле без каких бы то ни было противоречий. Считая новые СП двух данных величин ξ и η , удобно сначала ликвидировать их зависимость от A_i и B_i подстановкой

$$A_i \equiv -m^{-2} (B_{-\mu}\Gamma^{-1})_{-\mu}, \quad B_i \equiv 0. \quad (84)$$

Если теперь они не зависят от переменных ω , мы имеем $[\xi, B_i] = [\eta, B_i] = 0$, так что новые СП равны старым. Поэтому формула (83) необходима только для подсчета новых СП величин, зависящих от переменных ω .

При переходе к квантовой теории сильные уравнения (84) становятся уравнениями между операторами. Слабые ф-уравнения (70) и (57) с \mathcal{H} , задаваемым формулой (81), порождают волновые уравнения Шредингера, причем динамические переменные в этих уравнениях обладают новыми СП-соотношениями.

Пример 3. Электромагнитное поле. Мы получим электромагнитное поле, положив $m=0$ у векторного мезонного поля. Этот случай обладает особенностями, которые требуют отдельного исследования.

Теперь мы имеем

$$\mathcal{L} \equiv -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (85)$$

Уравнения (67)—(70) сохраняют силу, а (69) остается ф-уравнением. Уравнение (71) превращается в

$$(F_{\nu\mu})_{,\mu} = 0. \quad (86)$$

Уравнение (72) теперь вывести нельзя. В обычной электродинамической теории, впервые приведенной к гамильтоновой форме, близкой к подходу настоящей статьи, в работе Ферми [5], уравнение (72) считается дополнительным условием. В настоящем подходе такого предположения не делается.

В соответствии с (73) теперь мы имеем χ -уравнение

$$\chi \equiv (B_{-\mu}\Gamma^{-1})_{-\mu} = 0. \quad (87)$$

Легко видеть, что

$$[B_i, B'_i] = 0, \quad [\chi, \chi'] = 0, \quad [B_i, \chi'] = 0. \quad (88)$$

Поскольку B_i и χ имеют нулевые СП с остальными ϕ , а именно с ϕ' и ϕ_i , как это следует из принадлежности ϕ' и ϕ_i первому роду, мы видим, что B_i и χ должны быть

первого рода. Таким образом, теперь все φ и χ — первого рода. В этом заключается существенное различие между настоящим примером и предыдущим.

Посмотрим, как выразить H в виде линейной комбинации φ первого рода. Используя анализ, приведший к (79), можем представить (61) в виде

$$H \equiv \int \dot{y}_i \left(\omega_i + l_{\nu} A_{\nu\mu} B_{\mu} - \frac{1}{2} B_{\mu} B_{\mu} \Gamma^{-1} + \frac{1}{4} F_{-\mu-\nu} F_{-\mu-\nu} \Gamma \right) d^3 u + \\ + \int \dot{y}_r \varphi^r d^3 u \equiv \int \dot{y}_i \varphi_i d^3 u + \int \dot{y}_i l_{\nu} A_{\nu i} B_i d^3 u + \int \dot{y}_r \varphi^r d^3 u, \quad (89)$$

где φ_i определена формулой

$$\varphi_i \equiv \omega_i + l_{\nu} A_{\nu-\mu} B_{-\mu} - \frac{1}{2} B_{\mu} B_{\mu} \Gamma^{-1} + \frac{1}{4} F_{-\mu-\nu} F_{-\mu-\nu} \Gamma. \quad (90)$$

Это выражение для φ_i не содержит нормальной производной A_{μ} и поэтому зависит только от p и q ; отличаясь от левой части (55) лишь членом, пропорциональным B_i , оно слабо обращается в нуль и поэтому есть φ . Оно должно быть первого рода, поскольку сейчас все φ — первого рода. Таким образом, (89) представляет H в виде линейной комбинации φ первого рода.

Введенную выше φ_i можно рассматривать как φ , порождающую движение поверхности, нормальное к ней самой. Однако мы могли бы взять другую φ_i , отличающуюся от (90) на любую функцию p и q , пропорциональную B_i , и поэтому слабо обращающуюся в нуль; мы могли бы в равной мере считать ее за φ , порождающую движение поверхности, нормальное к ней. Дадим один особо любопытный пример.

Подставив A_i вместо V в (49) и введя гарантированно непротиворечивое обозначение $A_i^{\dot{}}$ для производной $\partial A_i / \partial \tau$, мы получаем

$$A_i^{\dot{}} - \dot{y}_r A_i^r \equiv \dot{y}_i A_{ii} \equiv \dot{y}_i (l_{\nu} A_{\nu i} + l_{\nu i} A_{\nu}). \quad (91)$$

Подставив $y_{\nu}^{\dot{}}$ вместо V в той же самой формуле, получаем

$$\dot{y}_i y_{\nu}^{\dot{}} \equiv \dot{y}_{\nu}^{\dot{}} - \dot{y}_s y_{\nu}^s.$$

Домножив это на l_{ν} , получаем

$$-\dot{y}_i y_{\nu}^{\dot{}} l_{\nu i} \equiv \dot{y}_{\nu}^{\dot{}} l_{\nu} + \dot{y}_s y_{\nu}^s l_{\nu} \equiv \dot{y}_i^{\dot{}}.$$

Домножив еще и на A_r и вычитая (91), получаем

$$-A_i^{\dot{}} + \dot{y}_r A_i^r \equiv \dot{y}_i^{\dot{}} A_r - \dot{y}_i l_{\nu} A_{\nu i}.$$

Благодаря этой формуле второй член (89) принимает вид

$$\int \dot{y}_i l_{,i} A_{,i} B_i d^3 u \equiv \int (A_i^r - A_i^r \dot{y}_r + \dot{y}_i A_r) B_i d^3 u \equiv$$

$$\equiv \int A_i^r B_i d^3 u - \int \dot{y}_r A_i^r B_i d^3 u - \int \dot{y}_i (A_r B_i)^r d^3 u.$$

Итак, (89) можно представить в виде

$$H \equiv \int \dot{y}_i \varphi_i^r d^3 u + \int A_i^r B_i d^3 u + \int \dot{y}_r \varphi^{+r} d^3 u, \quad (92)$$

где

$$\varphi_i^r \equiv \varphi_i - (A_r B_i)^r \quad (93)$$

и

$$\varphi^{+r} \equiv \varphi^r - A_i^r B_i. \quad (94)$$

Сейчас H выражен через φ первого рода: φ_i^r , B_i , φ^{+r} . Мы можем рассматривать φ_i^r как альтернативную φ_i , порождающую движение поверхности, нормальное к ней, а φ^{+r} — как альтернативную φ^r , порождающую изменение параметризации. Следует заметить, что φ_i^r и φ^{+r} имеют нулевые СП с A_i . Мы имеем из (67)

$$[A_i, A_i^r B_i] = A_i^r \delta(u - u'),$$

а поскольку A_i , будучи u -скаляром, удовлетворяет условию (38), по которому $[A_i, \varphi^{+r}] = A_i^r \delta(u - u')$. В итоге имеем

$$[A_i, \varphi^{+r}] = 0. \quad (95)$$

Далее, благодаря (21)

$$[A_i, \varphi_i^r] = A_\lambda [l_\lambda, w_i] - l_\lambda [A_\lambda, (A_r B_i)^r] =$$

$$= -A_\lambda \delta_{-\lambda} (u - u') - l_\lambda \{A_r^i \delta(u - u')\}^r = 0. \quad (96)$$

Помимо членов, порождающих произвольные изменения поверхности и ее параметризации, гамильтониан содержит дополнительный, а именно второй член в (89) или (92). Этот дополнительный член порождает дополнительный произвол в движении. Он допускает произвольную зависимость A_i от τ , поскольку уравнение $A_i^r = [A_i, H]$ удовлетворяется тождественно, как это следует из представления (92) для H с учетом (95) и (96).

Этот дополнительный произвол физически соответствует возможности изменения калибровки в процессе эволюции. Начальные условия, фиксирующие начальную поверхность и потенциалы и их нормальные производные на ней, не ограничивают калибровку в пространственно-временных точках вне этой поверхности. Можно сделать калибровочное преобразование

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial S / \partial x_\mu, \quad (97)$$

где S — произвольная функция четырех x_μ . Таким образом, можно выбрать S так, чтобы условия на начальной поверхности не изменились, а изменение калибровки в остальной части пространства-времени было произвольным. Это изменение повлияет на динамические переменные при последующих значениях τ и породит произвольные функции в решении уравнений движения, даже если движение поверхности задано.

В обычной электродинамической теории имеется дополнительное условие, (72), вследствие которого S из (97) ограничена в своем произволе необходимостью удовлетворить уравнению

$$S_{;\mu\mu} = 0. \quad (98)$$

Тогда уже нельзя менять калибровку, не повлияв на потенциалы или их нормальные производные на поверхности, так что дополнительного произвола в движении больше нет. Настоящая электродинамическая теория отличается от обычной, допуская более общие калибровочные преобразования, но две теории эквивалентны для всех калибровочно-инвариантных эффектов, а потому для всех эффектов, представляющих физический интерес.

В связи с настоящей теорией возникает вопрос, возможно ли движение, в котором калибровка меняется, а поверхность и ее параметризация — нет. Из формулы (92) для H сразу очевидно, что такое движение возможно, ибо в этом выражении для H можно положить $\dot{y}_i = \dot{y}_r = 0$, и второй член в H выживает, допуская тем самым темп изменения A_i произвольным. Общее изменение калибровки включает независимые изменения нормальной компоненты A_μ , т. е. A_t , и трехмерной дивергенции ее тангенциальной компоненты, т. е. $A_{-\mu-\mu}$, на поверхности. Таким образом, допускаемое нашими уравнениями движения изменение калибровки в ситуации, когда поверхность не меняется, — не самое общее.

Если мы потребуем, чтобы траектории движения образовывали в фазовом пространстве интегрируемые подпространства, как то обсуждалось на с. 32 статьи [2], нам нужна возможность проводить общее изменение калибровки без изменений поверхности, поскольку такого изменения можно добиться, сначала сдвинув поверхность и сделав некоторое изменение в калибровке, а затем сдвинув поверхность назад и сделав еще одно изменение в калибровке, не компенсирующее предыдущее. Чтобы получить уравнения движения, допускающие общие изменения кали-

бровки без каких бы то ни было изменений поверхности, мы должны добавить к H еще один член, а именно

$$\int v \chi d^3u, \quad (99)$$

где χ задана уравнением (87), а коэффициент v произволен. Это означает, что χ понимается как φ первого рода. Модифицированный таким образом гамильтониан нельзя вывести из плотности действия, но он все же будет допустимым гамильтонианом динамической системы, приводящим к непротиворечивым уравнениям движения при условии, что χ — первого рода. Модификация H просто увеличивает количество решений уравнений движения, не влияя на существовавшие ранее решения, которые оказываются частным случаем нового набора решений при $v=0$. Таким образом, модификацию можно считать не переходом к новой динамической системе, а лишь расширением толкования первоначальной системы.

Теперь мы можем перейти к квантовой теории, превратив в волновое уравнение Шредингера каждую φ первого рода, включая χ первого рода, обращенные в ψ первого рода в результате удовлетворения условию интегрируемости. Таким образом, мы получаем волновые уравнения

$$\varphi_t^+ \psi = 0, \quad \varphi^{+r} \psi = 0, \quad B_t \psi = 0, \quad (B_{-u} \Gamma^{-1})_{-u} \psi = 0. \quad (100)$$

Последние два из этих уравнений показывают, что волновая функция ψ , рассматриваемая как функция продольных и поперечных компонент A на поверхности, не зависит от продольных компонент. Таким образом, продольные полевые переменные входят в нее отличным от обычной квантовой электродинамики образом.

Ссылки

1. Weiss P. On the Hamilton—Jacobi theory and quantization of a dynamical continuum // Proc. Roy. Soc. A.—1938.—V. 169.—P. 102.
2. Dirac P. A. M. Generalized Hamiltonian dynamics¹⁾ // Can. J. Math.—1950.—V. 2.—P. 129.
3. Dirac P. A. M. Quantum theory of localizable dynamical systems // Phys. Rev.—1948.—V. 73.—P. 1092.
4. Chang T. S. Quantum mechanics of localizable dynamical systems // Phys. Rev.—1950.—V. 78.—P. 592.
5. Fermi E. Quantum theory of radiation²⁾ // Rev. Mod. Phys.—1932.—V. 4.—P. 87.

¹⁾ Статья 18 настоящего сборника.—Примеч. пер.

²⁾ Русский перевод: Ферми Э. Научные труды.—Т. 1.—М.: Наука, 1971.—С. 375—427.—Примеч. пер.

20. ОБОБЩЕННАЯ ГАМИЛЬТОНОВА ДИНАМИКА ¹⁾

Proceedings of the Royal Society
A vol. 246 (1958), pp. 326—332

GENERALIZED HAMILTONIAN DYNAMICS

By P. A. M. DIRAC, F. R. S., St. John's College, Cambridge
(Received 13 March 1958)

Предложенная автором процедура перехода от лагранжиана к гамильтониану в ситуации, когда импульсы не являются независимыми функциями скоростей, приведена к более простой и практичной форме, причем основные результаты получены прямым решением уравнений, вытекающих из требований самосогласованности. Показано, как (при некоторых условиях) можно исключить часть степеней свободы и тем самым добиться существенного упрощения гамильтонова формализма.

Обычная процедура перехода от лагранжевой формы уравнений движения к гамильтоновой форме требует, чтобы импульсы были независимыми функциями скоростей. На практике имеется ряд важных случаев, когда это условие не выполнено — например, в релятивистской теории поля; — и возникает необходимость обобщить процедуру. Один из способов сделать это был предложен автором ²⁾. В настоящей статье он приводится к более простому и практичному виду.

Альтернативный [подход к проблеме дан Андерсоном и Бергманном ³⁾. Будучи приложим только к квадратичным по скоростям лагранжианам, их метод менее общий, чем настоящий. В настоящем [методе лагранжиан может быть любой функцией скоростей и координат, при единственном ограничении, чтобы лагранжевы уравнения движения не приводили к несовместности.

¹⁾ Перевод с английского В. П. Павлова.

²⁾ Dirac P. A. M. // Can. J. Math.—1950.—V. 2.—P. 129.

³⁾ Anderson J. L., Bergman P. G. // Phys. Rev.—1951.—V. 83.—P. 1018.

§ 1. Ф-уравнения

Рассмотрим динамическую систему, описываемую в терминах координат q_n ($n=1, 2, \dots, N$) и скоростей \dot{q}_n , с лагранжианом $L=L(q, \dot{q})$. Как обычно, определим импульсы

$$p_n = \partial L / \partial \dot{q}_n. \quad (1)$$

Может оказаться, что p не являются независимыми функциями \dot{q} . Если среди p имеется только $N-M$ независимых функций \dot{q} , возникнет M независимых соотношений

$$\varphi_m(p, q) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (2)$$

M может быть любым — от 0 до N .

Лагранжевы уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial L}{\partial q_n} \quad (3)$$

задают теперь $N-M$ функций, зависящих от ускорений \ddot{q}_n , и дают M уравнений, связывающих только координаты и скорости. Может оказаться, что дифференцированием по времени (однократным или, возможно, многократным) мы можем получить некоторые новые независимые уравнения, содержащие ускорения. Если таких уравнений недостаточно, чтобы задать все ускорения, то общее решение уравнений движения с данными начальными значениями q и \dot{q} будет содержать несколько произвольных функций времени.

Сделаем произвольные малые вариации δq_n , $\delta \dot{q}_n$ координат и скоростей. Они приведут к вариациям δp_n , сохраняющим уравнения (1). Эти вариации должны сохранять и уравнения (2), являющиеся следствием (1), так что

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial q_n} \delta q_n + \frac{\partial \varphi_m}{\partial p_n} \delta p_n = 0. \quad (4)$$

Уравнения (4) будут единственными ограничениями на вариации δp_n , учитывающими уравнения (2) в том смысле, что независимые вариации первого порядка у p и q дают вариации первого порядка у φ .

Мы имеем

$$\begin{aligned} \delta(p_n \dot{q}_n - L) &= p_n \delta \dot{q}_n + \dot{q}_n \delta p_n - \frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \delta \dot{q}_n = \\ &= \dot{q}_n \delta p_n - \frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n. \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку члены с $\delta \dot{q}$ сокращаются, вариация по \dot{q} , сохраняющая уравнения (1) в отсутствие вариаций по q и p , оставляет неизменной $p_n \dot{q}_n - L$. Это означает, что $p_n \dot{q}_n - L$ является функцией только q и p , так что мы можем положить

$$p_n \dot{q}_n - L = H(q, p). \quad (6)$$

Конечно, функция $H(q, p)$ определена неоднозначно. Мы можем сделать замену

$$H \rightarrow H + c_m \varphi_m, \quad (7)$$

где c_m — любые функции q и p . В случае, когда L однороден первой степени по \dot{q} , мы можем взять $H = 0$.

Теперь уравнение (5) дает

$$\frac{\partial H}{\partial p_n} \delta p_n + \frac{\partial H}{\partial q_n} \delta q_n = \dot{q}_n \delta p_n - \frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n,$$

где вариации δq_n , δp_n ограничены уравнением (4), а в остальном произвольны. Поэтому

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial p_n}, \quad (8)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial q_n} = \frac{\partial H}{\partial q_n} + u_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_n}, \quad (9)$$

где u_m — некоторые коэффициенты. При преобразовании (7) к u_m добавляются функции, зависящие только от q и p , а именно минус c_m .

Уравнения (8) показывают, что \dot{q} заданы через q , $N - M$ независимых переменных p и M новых переменных u . Таким образом, вместо q и \dot{q} мы можем взять в качестве основных динамических переменных q , p и u . Это и есть гамильтоновы переменные.

С помощью (9) уравнения движения (3) принимают вид

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} - u_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_n}. \quad (10)$$

Если обычным образом определить скобку Пуассона (СП)

$$[A, B] = \frac{\partial A}{\partial q_n} \frac{\partial B}{\partial p_n} - \frac{\partial A}{\partial p_n} \frac{\partial B}{\partial q_n}, \quad (11)$$

то для любой g , зависящей от q и p , имеем

$$\dot{g} = [g, H] + u_m [g, \varphi_m]. \quad (12)$$

Одно это уравнение охватывает все уравнения (8) и (10). Оно есть общее гамильтоново уравнение движения.

Определение СП (11) требует, чтобы q и p считались независимыми переменными. Любые соотношения, ограничивающие, подобно уравнениям (2), независимость q и p , не должны использоваться до взятия СП, иначе СП потеряют однозначную определенность. Чтобы помнить об этом при работе с некоторыми из наших уравнений, удобно назвать такие ограничивающие уравнения *слабыми уравнениями* и записать их в виде

$$\varphi_m \approx 0.$$

§ 2. χ -уравнения

Дифференцируя по времени (2) и используя (12), мы получаем

$$[\varphi_m', H] + u_m [\varphi_m', \varphi_m] = 0. \quad (13)$$

Если не все эти уравнения сводятся к $0 = 0$, они уменьшат число гамильтоновых переменных q , p , u , выявив некоторые соотношения между ними.

Может оказаться, что уравнения (13) приводят к некоторым соотношениям только между q и p , независимым по отношению к φ -уравнениям. Они должны быть слабыми уравнениями, поэтому запишем их в виде

$$\chi_k(q, p) \approx 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (14)$$

Дифференцируя по времени каждое из уравнений (14) получаем

$$[\chi_k, H] + u_m [\chi_k, \varphi_m] = 0. \quad (15)$$

Эти уравнения могут приводить к новым соотношениям только между q и p , т. е. к новым уравнениям (14), которые, в свою очередь, могут привести к новым уравнениям (15). Продолжим эту процедуру до тех пор, пока она идет, получив таким образом все уравнения (14) и (15), являющиеся следствиями (2) и общего уравнения движения (12). Пусть полный набор описывается индексами $k = 1, 2, \dots, K$. Таким образом, число независимых p и q мы свели до $2N - M - K$, а u ограничились уравнениями (13) и (15), если только эти уравнения не сводятся к $0 = 0$ или к χ -уравнениям.

Рассмотрим эти уравнения (13) и (15) как уравнения для неизвестных u_m с коэффициентами, заданными как

функции q и p . Они должны иметь решение

$$u_m = U_m(q, p), \quad (16)$$

поскольку из отсутствия его [следовала бы противоречивость лагранжевых уравнений движения (3). По смыслу решения (16), уравнения

$$\begin{aligned} [\varphi_{m'}, H] + U_m[\varphi_{m'}, \varphi_m] &\approx 0, \\ [\chi_k, H] + U_m[\chi_k, \varphi_m] &\approx 0 \end{aligned} \quad (17)$$

выполняются вследствие (2) и (14).

Вообще говоря, решение (16) неоднозначно. Мы можем добавить к U_m любое решение $V_m = V_m(q, p)$ уравнений

$$V_m[\varphi_{m'}, \varphi_m] \approx 0, \quad V_m[\chi_k, \varphi_m] \approx 0. \quad (18)$$

Пусть V_{a_m} ($a=1, 2, \dots, A$)—все независимые решения уравнений (18). Тогда общее решение уравнений (13) и (15) есть

$$u_m = U_m + v_a V_{a_m}, \quad (19)$$

где v_a —произвольные коэффициенты.

С помощью уравнений (19) можно исключить переменные u_m , так что в качестве основных гамильтоновых переменных мы имеем $2N - M - K$ оставшихся независимыми после учета уравнений (2) и (14) переменных q и p и A переменных v_a . Полное число этих переменных может быть значительно меньше первоначального числа $2N$ независимых переменных, поскольку уравнения движения могут сократить его.

Андерсон и Бергман называют φ -уравнения первичными связями, а χ -уравнения—вторичными связями. Во многих аспектах φ и χ выступают на равной ноге, и поэтому удобно их все обозначать как χ_j ($j=1, 2, \dots, M+K$). С гамильтоновой точки зрения, существенно то различие между ними, что φ фигурируют в общем уравнении движения (12), а χ нет.

§ 3. Условие принадлежности первому роду

По определению, зависящая от q и p функция есть величина *первого рода*, если все ее СП с H и с χ_j обращаются в нуль. Достаточно, чтобы это обращение было слабым, т. е. с использованием уравнений (2) и (14). Зависящая от q и p функция, не удовлетворяющая этим условиям, называется величиной *второго рода*.

Теорема. СП двух величин первого рода есть величина первого рода. Пусть X и Y — первого рода, так что

$$[X, \chi_j] \approx 0, \quad [Y, \chi_j] \approx 0.$$

Эти слабые уравнения означают, что

$$[X, \chi_j] = x_{jI'} \chi_{I'}, \quad [Y, \chi_j] = y_{jI'} \chi_{I'},$$

с некоторыми коэффициентами $x_{jI'}$ и $y_{jI'}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} [[X, Y], \chi_j] &= [[X, \chi_j], Y] - [[Y, \chi_j], X] \approx \\ &\approx x_{jI'} [\chi_{I'}, Y] - y_{jI'} [\chi_{I'}, X] \approx 0. \end{aligned}$$

Аргументация сохраняет силу, если заменить χ_j на H' : откуда $[[X, Y], H'] \approx 0$. Следовательно, $[X, Y]$ — первого рода.

Положим

$$H + U_m \Phi_m = H'. \quad (20)$$

Уравнения (17) показывают, что СП H' с любой χ_j слабо обращается в нуль. Далее,

$$[H, H'] \approx U_{m'} [\Phi_{m'}, H] \approx 0$$

из первого из уравнений (17), умноженного на $U_{m'}$. Таким образом, H' — первого рода. Заметим, что гамильтониан H' может быть получен из H преобразованием (7).

Любая линейная комбинация Φ с коэффициентами, зависящими от q и p , может рассматриваться как другая Φ . Положим

$$V_{a\alpha} \Phi_\alpha = \Phi_a. \quad (21)$$

Уравнения (18) показывают, что СП Φ_a с любой χ_j слабо обращается в нуль. Мы только что видели, что СП Φ_a с H' обращается в нуль, так что СП ее с H также должен обращаться в нуль. Следовательно, Φ_a — первого рода а

Благодаря (19) общее уравнение движения (12) принимает вид

$$\dot{g} = [g, H'] + v_a [g, \Phi_a]. \quad (22)$$

Теперь оно содержит гамильтониан первого рода H' и Φ первого рода Φ_a . Коэффициенты v_a , отвечающие этим Φ первого рода, никак не ограничиваются уравнениями движения. Таким образом, в общем решении уравнений движения с данными начальными условиями каждый из них приводит к произвольной функции времени.

Каждая Φ первого рода имеет вид $U_m \Phi_m$, где U_m удовлетворяют (17). Поэтому каждая независимая Φ первого

рода должна появиться в (22). Следовательно, число независимых функций времени в общем решении уравнений движения равно числу независимых φ первого рода. Следует считать, что все решения уравнений движения, различие которых при данных начальных условиях вызвано разным выбором произвольных функций времени, отвечают одному и тому же физическому состоянию движения, по-разному описываемому в зависимости от выбора некоторых не имеющих физического значения математических переменных (например, от выбора калибровки в электродинамике или координатной системы в релятивистской теории).

На практике инвариантные свойства интеграла действия обычно позволяют узнать, какие произвольные функции времени имеются в общем решении уравнений движения. Это знание помогает выделить φ первого рода из набора всех φ , не прибегая к трудоемкому вычислению всех СП. Любая переменная скорости, отбрасывание которой не сказывается на физическом состоянии, должна появиться как коэффициент v_a , связанный с φ первого рода, в гамильтоновом уравнении движения (22).

§ 4. Редукция числа степеней свободы

Предположим, что некоторые φ первого рода содержат импульсные переменные лишь линейно с числовым коэффициентом. Хотя математически это — очень специальный случай, на практике он появляется часто и поэтому важен.

Тривиальной заменой переменных мы можем привести эти φ первого рода к виду

$$p_r - f_r \approx 0, \quad r = 1, 2, \dots, R, \quad (23)$$

где f_r зависят только от q . Условие принадлежности первому роду требует, чтобы СП величин $p_r - f_r$ слабо обращались в нуль. Эти СП могут зависеть только от q . В предположении, что нет χ_j , зависящих только от q , эти СП должны обращаться в нуль сильно. Следовательно,

$$f_r = \partial F / \partial q_r,$$

где F — некоторая функция, зависящая от q . Добавим теперь к лагранжиану член

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_n} \dot{q}_n; \quad (24)$$

это не изменит уравнений движения. К p_r добавится $\partial F/\partial q_r$, так что φ -уравнения (23) примут вид

$$p_r \approx 0. \quad (25)$$

Продолжим работу с новым лагранжианом. Любую из χ_j , не попадающую в (25), назовем χ_i ($i = 1, 2, \dots, M + K - R$); χ_i могут быть как первого, так и второго рода. Не теряя общности, можно предположить, что χ_i не зависят от переменных p_r . Можно предположить, что и H' не зависит от p_r , поскольку преобразованием (7) к другому H' первого рода всегда можно добиться этого.

Поскольку p_r — первого рода, мы имеем

$$[\chi_i, p_r] \approx 0, \quad [[\chi_i, p_r], p_r] \approx 0 \quad (26)$$

и т. д. Следовательно, если у χ_i вообще есть зависимость от q_r , она может быть лишь в виде

$$\chi_i = \beta_{ii} \chi_i^*, \quad (27)$$

где χ^* слабо обращаются в нуль и не зависят от q_r , так что q_r появляются только в коэффициентах β_{ii} . Это означает, что условия $\chi_i \approx 0$ эквивалентны условиям $\chi^* \approx 0$, не затрагивающим переменных q_r . Число χ^* должно быть равно числу χ_i (χ^* по количеству не могут превышать χ_i , поскольку все условия $\chi_i^* \approx 0$ суть следствия условий $\chi_i \approx 0$ плюс условий (26), которые сами являются следствиями $\chi_i \approx 0$).

Если χ_i — первого рода, применение теоремы предыдущего раздела к χ_i и p_r показывает, что χ_i выражается через χ^* только первого рода, т. е. что коэффициенты β_{ii} в (27) можно сделать ненулевыми лишь для χ_i^* первого рода.

Проделав над H' такую же работу, как над χ_i , мы находим, что

$$H' = H'' + \gamma_i \chi_i^*, \quad (28)$$

где H'' , как и χ^* , не зависит от q_r . Поскольку H' — первого рода, мы можем заключить, что H'' первого рода и что любые из фигурирующих в (28) χ^* — первого рода.

Посмотрим [теперь, какой вид примет уравнение движения (22)]. Для g , совпадающей с одной из q_r , мы обнаруживаем, что q_r произвольна, так что q_r меняется произвольно. Для g , зависящей от переменных q_s, p_s ($s = R+1, \dots, N$), мы получаем уравнение движения вида

$$\dot{g} = [g, H''] + \omega_\alpha [g, \chi_\alpha^*], \quad (29)$$

где χ_a^* суть χ^* первого рода. (В их число не обязательно попадают все χ^* первого рода.) Переменные p_r в этом уравнении не появляются, а от q_r могут зависеть лишь коэффициенты w_a .

Предположим, что произвольные вариации w_a можно получить, варьируя q_r и те из коэффициентов v_a в (22), которые связаны с иными, чем p_r , q первого рода. На практике это предположение обычно оправдывается. Тогда мы можем считать w_a в (29) произвольными коэффициентами, которые вместе с q_s и p_s образуют основные гамильтоны переменные. В общем уравнении движения (29) q_r и p_r больше не появляются. По своему характеру это уравнение столь же фундаментально, что и (22), но относится только к степеням свободы q_s, p_s . Таким образом, степени свободы q_r, p_r выпали из теории.

Может оказаться, что некоторые из χ_a^* , фигурирующих в (29), содержат импульсные переменные лишь линейно с численными коэффициентами. Тогда мы можем повторить всю процедуру и добиться дальнейшей редукции числа эффективных степеней свободы.

СОДЕРЖАНИЕ

П. А. М. Дирак и логические основы квантовой теории (<i>Б. В. Медведев</i>)	5
1. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ. Proc. Roy. Soc. A.—1925.— V. 109.— P. 642 (<i>перевод В. П. Пазлоза</i>)	25
2. К ТЕОРИИ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ. Proc. Roy. Soc. A.—1926.— V. 112.— P. 661 (<i>перевод М. К. Поливанова</i>)	39
3. ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КВАНТОВОЙ ДИ- НАМИКИ. Proc. Roy. Soc. A.—1927.— V. 113.— P. 621 (<i>перевод М. К. Поливанова</i>)	60
4. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ИСПУСКАНИЯ И ПОГЛОЩЕ- НИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ. Proc. Roy. Soc. A.—1927.— V. 114.— P. 243 (<i>перевод А. Б. Кожевникова</i>)	85
5. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОНА. Proc. Roy. Soc. A. 1928.— V. 117.— P. 610 (<i>перевод М. К. Поливанова</i>)	113
6. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОНА. Часть II. Proc. Roy. Soc. A.—1928.— V. 118.— P. 351 (<i>перевод М. К. По- ливанова</i>)	129
7. ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОНОВ И ПРОТОНОВ. Proc. Roy. Soc. A.—1930.— V. 126.— P. 360 (<i>перевод В. П. Шелеста</i>)	142
8. К АННИГИЛЯЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ И ПРОТОНОВ. Proc. Camb. Phil. Soc.—1930.— V. 26.— P. 361 (<i>перевод В. П. Ше- леста</i>)	150
9. КВАНТОВАННЫЕ СИНГУЛЯРНОСТИ В ЭЛЕКТРО- МАГНИТНОМ ПОЛЕ. Proc. Roy. Soc. A.—1931.— V. 133.— P. 60 (<i>перевод В. П. Шелеста</i>)	169
10. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА. Proc. Roy. Soc. A.—1932.— V. 136.— P. 453 (<i>перевод В. П. Пав- лова</i>)	184
11. К КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ (совместно с В. А. Фоком и Б. Подольским). Sow. Phys.—1932.— Bd 2.— S. 468 (<i>перевод В. П. Павлова</i>)	197

12.	ЛАГРАНЖИАН В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ. <i>Sov. Phys.</i> —1933.—Vd 3.—S. 64 (перевод М. К. Поливанова)	209
13.	ТЕОРИЯ ПОЗИТРОНА. Доклад на 7-м Сольвейском конгрессе (1934 г.) (перевод В. П. Шелеста)	218
14.	ОБСУЖДЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ТЕОРИИ ПОЗИТРОНА. <i>Proc. Camb. Phil. Soc.</i> —1934.—V. 30.—P. 150 (перевод В. П. Шелеста)	228
15.	ОТНОШЕНИЕ МЕЖДУ МАТЕМАТИКОЙ И ФИЗИКОЙ. <i>Proc. Roy. Soc. (Edinburgh)</i> .—1938—39.—V. 59.—P. 122 (перевод М. К. Поливанова)	245
16.	ТЕОРИЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЮСОВ. <i>Phys. Rev.</i> —1948.—V. 74. P. 817 (перевод В. П. Павлова)	255
17.	ФОРМЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ. <i>Rev. Mod. Phys.</i> —1949. V. 21.—P. 392 (перевод В. П. Павлова) . . .	284
18.	ОБОБЩЕННАЯ ГАМИЛЬТОНОВА ДИНАМИКА. <i>Can. J. Math.</i> 1950.—V. 2.—P. 129 (перевод В. П. Павлова) . . .	303
19.	ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМА ПОЛЕВОЙ ДИНАМИКИ. <i>Can. J. Math.</i> —1951.—V. 3.—P. 1 (перевод В. П. Павлова)	329
20.	ОБОБЩЕННАЯ ГАМИЛЬТОНОВА ДИНАМИКА. <i>Proc. Roy. Soc. A.</i> 1958.—V. 246.—P. 326 (перевод В. П. Павлова)	357

Научное издание

ДИРАК Поль Адриан Морис
(Великобритания)

К СОЗДАНИЮ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ ОСНОВНЫЕ СТАТЬИ 1926—1958 ГОДОВ

Серия «Библиотека теоретической физики», выпуск 7

Заведующий редакцией *Н. А. Носова*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *И. Ш. Аксельрод*
Корректор *Н. Д. Дорохова*

ИБ № 32780

Сдано в набор 04.10.89. Подписано к печати 23.03.90. Формат 84×108/32.
Бумага тип. № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 19,43.
Усл. кр.-отт. 19,38. Уч.-над. л. 20,23. Тираж 9600 экз. Заказ № 3020.
Цена 2 р. 10 к.

Издательско-производственное и книготорговое объединение «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО
«Первая Образцовая типография» Государственного комитета СССР по печати.
113054 Москва, Валовая, 28

Отпечатано во 2-й типографии издательства «Наука». Заказ 983.
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6